Coperta şi supracoperta: DUMITRU IONESCU

LUCIENNE FfiLIX
Expoal moderne des mathdmatiques eldmentairea
Troisifeme edition
© DUNOD, PARIS, 1966

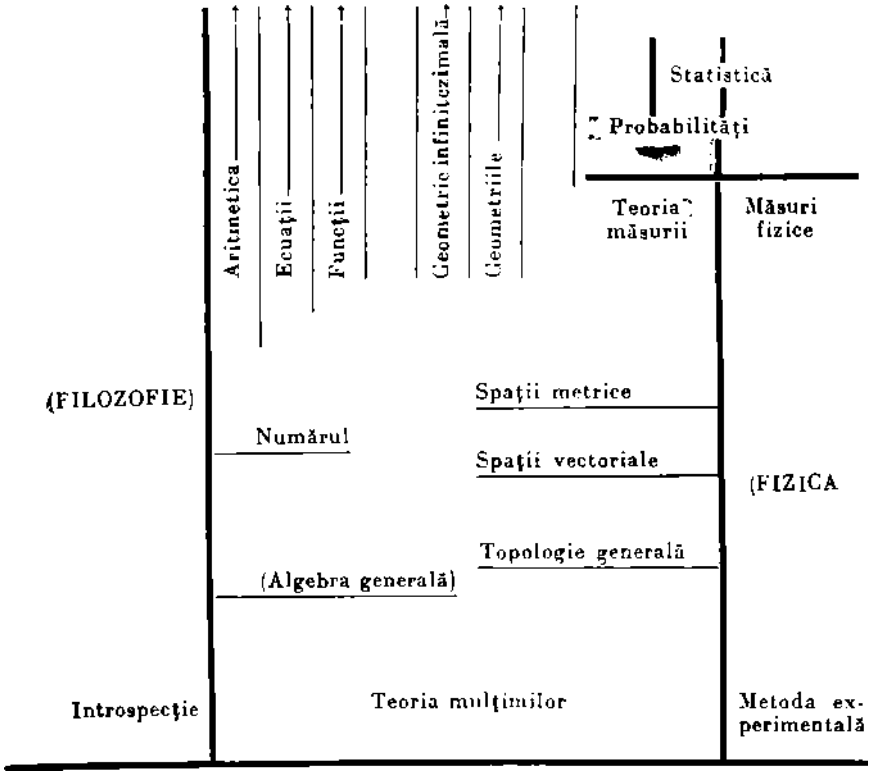
EXPUNERE MODERNĂ A MATEMATICII ELEMENTARE

LUCIENNE FELIX

<30

EDITURA ŞTIINŢIFICĂ
Bucureşti, 1973

MATEMATICA văzută din pnnctul de vedere al matematicii elementare



«GÎNDIREA) ££$_{A^{\breve{A}}LISM}$ **(Metama** **Simbolism .«rT**

i

CUVÎNT ÎNAINTE

In zilele noastre, nici o elaborare sistematică a matematicii nu poate fi considerată satisfăcătoare dacă nu pune în evidenţă *unitatea* acestei ştiinţe; fiindcă în ciuda diversităţii structurilor considerate — de la introducerea noţiunilor simple cum sînt întregii şi fracţiile, punctele şi dreptele, pînă la noţiunile cele mai complexe — există în matematică o *continuitate de metodă.* în acest edificiu îşi găsesc locul şi rezultatele cunoscute încă din copilărie —un loc uneori modest şi accesoriu, alteori fundamental. De aceea, înainte de a aborda studiile de nivel înalt, este necesar, din punct de vedere logic şi psihologic, să se reelabo- reze,într-o formă satisfăcătoare sub aspect matematic, ansamblul rezultatelor şi cunoştinţelor acumulate în cursul studiilor elementare, cunoştinţe care sînt încă adine impregnate cu elemente senzoriale, fapt justificat prin apelul necontenit la experienţa fizică şi la reprezentarea intuitivă, neanalizată, despre spaţiu.

În afară de aceasta, teoriile şi aplicaţiile lor recurg, cu titlu accesoriu, la teoreme de aritmetică, de algebră sau de geometrie euclidiană, care nu pot fi nici ignorate, nici admise fără demonstraţie. Cu prilejul expunerii teoriilor elementare şi a capitolelor care constituie continuarea directă a acestora, vom lua un prim contact cu noţiunile, metodele şi simbolurile specifice matematicii superioare.

Metoda adoptată în această lucrare este cea axiomatică, într-adevăr, prima problemă care se pune este aceea a coordonării noţiunilor care ne sînt familiare, şi aceasta chiar cu preţul că enunţurile binecunescute vor trebui să îmbrace forme noi. Expunerea constă atunci în a alege unele din aceste enunţuri în calitate de axiome, şi în a arăta că ansamblul de enunţuri, astfel ales, este suficient pentru a deduce din el toate celelalte rezultate ale teoriei expuse. Ne-am străduit să alegem, pentru a fi ridicate la rangul de axiome, rezultatele cele mai necesare pentru intuirea obiectelor care urmează să fie introduse, fără însă să urmărim reducerea la minimum a conţinutului lor. Introducerea progresivă a acestor

axiome pune în evidenţă aporturile lor succesive, ceea ce pregăteşte terenul pentru generalizări dincolo de domeniul clasic al numărului real sau al spaţiului euclidian.

Elementele astfel definite au un caracter abstract. Obiectele concepute plecînd nemijlocit de la experienţa fizică constituie modele ale acestor elemente abstracte, modele asupra cărora se poate opera cu raţionamentul matematic, în măsura în care corespund structurilor puse în evidenţă. Aşa se face că vom putea reprezenta vectorii prin săgeţi, vom putea desena figuri şi vom putea folosi modele mecanice sau electrice: toate modelele cu aceeaşi structură (vom spune: cu structuri *izomorfe)* sînt echivalente din punct de vedere matematic. Totuşi, în cadrul acestei expuneri elementare, ne vom ocupa în mod special, pe parcursul Cărţilor a Il-a şi a IlI-a, de studierea modelelor clasice: mulţimi de numere, mulţimi de puncte în spaţiul cu 1, 2 sau 3 dimensiuni.

Ne propunem să studiem materialul care constituie,' prin tradiţie, matematica elementară, într-o formă care pregăteşte terenul pentru abordarea ulterioară a studiului matematicii superioare. Cartea I reuneşte structurile fundamentale. Natura chestiunilor tratate obligă uneori la demonstraţii delicate (în special, în legătură cu funcţiile continue) pe care cititorul le poate omite la o primă lectură, dar în felul acesta vor fi introduse toate noţiunile efectiv utile pentru cele expuse în continuare. Fiecare din capitolele acestei prime Cărţi este menit mai ales să constituie temelia unor elaborări în parte autonome: teoria numerelor, teoria ecuaţiilor şi a funcţiilor, geometria afină şi proiectivă, geometria metrică. De aceea, nu este absolut indispensabil să se studieze în întregime această Carte înainte de a aborda unul sau altul din capitolele Cărţilor următoare; ea poate- servi drept carte de referinţă pentru cititorul care doreşte să investigheze direct o parte a edificiului, chiar dacă nu-i va studia fundamentele decît după aceea.

Rezultă de aici o deosebit de mare libertate în utilizarea acestei lucrări în cadrul ultimului an de studii liceale: ordinea subiectelor tratate va putea fi aleasă după voie, rezervînd anumite teme pentru a fi recomandate ca lectură complementară, mai mult sau mai puţin aprofundată, în funcţie de preferinţele şi preocupările elevilor, şi în funcţie de gradul lor de maturitate.

Luată în ansamblu, această lucrare de iniţiere conduce direct la primele lucrări introductive în matematica superioară, în particular la *Cursul de matematică generală* de C. PISOT şi M. ZA- MANSKY, la *Introducerea în algebra şi analiza modernă* de M. ZA- MANSKY,caşi la alte lucrări din această colecţie*. Sperăm că cititorul va găsi în ea o introducere utilă şi nu prea dificilă, care îl va încuraja să-şi continue studiile de matematică.

Mulţumesc editurii Dunod pentru atenţia acordată acestei lucrări şi pentru preocuparea privind prezentarea ei grafică.

Lucienne FfiLIX

---

* **Collection Universitaire de Mathâmatiques, Ed. Dunod, Paris.**

PREFAŢĂ LA EDIŢIA A TREIA

Pregătirea acestei noi ediţii ne-a dat prilejul, în primul rînd, •de a revizui şi moderniza modul de prezentare a Cărţii a III-a, ■consacrate analizei. Accentul este pus acum pe structurile în ■care se înscriu diferitele chestiuni referitoare la studiul funcţiilor, şi aceste structuri sînt vizualizate cu ajutorul schemelor. Acum 15—20 ani, schemele erau folosite cel mult pentru a consemna pe tablă mersul explicaţiilor profesorului. într-o concepţie axată pe noţiunile de mulţime şi relaţie, aceste scheme fac parte integrantă din expunere; ele fac sesizabil nemijlocit însuşi obiectul de studiu, uşurează expunerea şi, mai ales, permit perceperea sub un aspect mai general a noţiunilor despre care mult prea adesea se consideră că sînt asociate exclusiv funcţiilor numerice.

în afară de aceasta, există tendinţa, devenită de acum ireversibilă, de a introduce, dacă nu în „matematica elementară" — obiect de studiu nu prea precis definit — măcar în programul ultimelor clase ale învăţămîntului mediu, domenii din ce în ce mai largi ale analizei. De aceea, în noua redactare, nu numai că am completat studiul funcţiilor logaritmică şi exponenţială, dar am adăugat şi cîteva pagini consacrate ecuaţiilor diferenţiale şi notaţiei

diferenţiale. Potrivit spiritului acestei lucrări, nu ne-am limitat la a da pur şi simplu regulile şi formulele referitoare la cele cîteva exemple care figurează în programul de învăţămînt; dar nici expunerea sistematică a teoriei acestor subiecte nu intra în intenţiile noastre. Propunem de aceea o introducere în aceste probleme importante într-o formă accesibilă cititorilor noştri, dar care pune totuşi în lumină natura problemelor noi, cu scopul de a pregăti terenul pentru dezvoltări detaliate rezervate pentru o etapă ulterioară de studiu.

Dintre modificările mai puţin importante, semnalăm cîteva pagini noi referitoare la numărabilitate şi revizuirea cîtorva paragrafe; de pildă, noţiunea de asimptotă şi cea de direcţie asimptotică sînt abordate, aşa cum se şi cuvine, în cadrul geometriei afine.

Sperăm să îndreptăţim în felul acesta încrederea pe care ne-au dovedit-o numeroşi cititori francezi şi din alte ţări. Ne facem o plăcută îndatorire din a mulţumi tuturor acelora care, profesori, traducători sau cititori, au binevoit să ne comunice remarcile lor, ca şi editurii Dunod pentru deosebita grijă pe care a acordat-o acestei lucrări.

Lucienne
FfiLIX
martie 1965

TABLA DE MATERII

CARTEA ÎNTÎI
STRUCTURI FUNDAMENTALE

CAPITOLUL 1. Vocabularul ţi simbolurile din teoria mulţimilor. Operaţii.

1. *Definiţii introductive* 25
2. *Relaţii de echivalenţă* 28
3. *Relaţii de ordine*..... 30
4. *Operaţiile* 31

CAPITOLUL **2. Numerele**

1. *întregii naturali* 37
I. Adunarea 37
II. Relaţia de ordine..... 38
III. Bine ordonare 40
IV. înmulţirea 44
V. Mulţimea *N* a întregilor naturali estearhimedeană 47
2. *Numere relative. Simetrizare* 48
I. Noţiunea de izomorfism a două structuri.... 49
II. Extensie prin simetrizare 49
3. *Fracţii şi numere raţionale*..... 55
I. Fracţiile 56
II. Numerele raţionale 58

III. în raport cu adunarea şi înmulţirea, mulţimea *Z* a întregilor este izomorfă cu o submulţime a mulţimii *Q* a numerelor raţionala 60

4. *Noţiuni despre numerele reale*..... 63
I. Introducerea rădăcinilor pătrata..... 63
II. Axioma completitudinii 65
III. Proprietăţi ale mulţimii *R* a numerelor reale 67
IV. Mulţimea *Q* a numerelor raţionale ca submulţime a mulţimii *R* a numerelor reale..... 60

CAPITOLUL 3. Spaţii vectoriale
I. Vectori. Operaţii vectoriale 70
II. Spaţii vectoriale 74
III. Spaţiu punctual imagine a unui spaţiu vectorial 79

CAPITOLUL 4. Aplicaţiile unei mulţime intr-o mulţime. Transformări punctuale. Funcţii numerice

Partea întîi: PUNCT DE VEDERE ALGEBRIC

1. *Noţiunea generală de aplicaţie*..... 83
I. Definiţie 83
II. Grupul aplicaţiilor unei mulţimi pe ea însăşi.. 86

2. *Transformări punctuale (Generalităţi)*..... 88
I. Vocabular 88
II. Clasificarea transformărilor punctuale 90
III. Transmutată unei transformări punctuale printr-o alta..... 90

3. *Funcţii numerice de o variabilă (Generalităţi)* 91
I. Definiţii 91
II. Creşterea şi descreşterea unei funcţii numerice în mulţimea ei de definiţie..... 94

Partea a doua: PUNCT DE VEDERE TOPOLOGIC

1. *Generalităţi: Vecinătăţi. Limite 96*

2. *Studiul local al unei funcţii numerice*..... 101
3. *Trecerea de la studiul local la studiul.....global* 105
I. Teoreme fundamentale..... 105
II. Aplicaţii la funcţii definite, continue, derivabile 109
III. Extensia noţiunilor de vecinătate şi de limită 112
IV. Aplicaţii ale noţiunii de continuitate..... 113

CAPITOLUL 5. Introducere in geometria metrică

1. *Definiţia spaţiilor metrice euclidiene*..... 115
   I. Introducerea unei metrici 116
   II. Aplicaţie la spaţiul punctual cu două dimensiuni 119
   III. Geometrie metrică în spaţiul cu trei dimensiuni 127
   IV. Orientarea spaţiilor metrice cu două şi trei dimensiuni 128
2. *Produse de vectori înspaţiul cu*.....*trei dimensiuni* 136
   I. Produs scalar..... 131
   II. Produs vectorial(Geometriecu trei dimensiuni) 133
   III. Notaţia trigonometrică..... 136
3. *Unghiuri*..... 137
   I. Cosinusul şi sinusul unei perechi ordonate de vectori
   unitari 137
   II. Congruenţa perechilor de vectori. Unghiuri 139
4. *Limite referitoare la funcţiile trigonometrice. Radian.*
   Calculul lui 7t 143
   I. Unghiuri şi coarde..... 143
   II. Limita raportului dintre lungimea c a coardei cercului de rază unitate şi măsura q> a unghiului la centru 145
   III. Calculul aproximativ al numărului K 146

CAPITOLUL 6. Algebra booleana pe mulţimi. Măsuri. Probabilităţi

1. *Algebra mulţimilor* 149
2. *Măsuri* 155
   I. Definiţii 155
   II. Măsură naturală pe dreapta reală..... 156
   III. Măsuri în spaţiul cu două dimensiuni..... 158
      A) Măsuri naturale în geometria afină 158
      B) Aplicaţii în geometria metrică..... 162

1) Arii plane 162:
2) Masa unui segment de dreaptă. Densitate 163
IV. Măsuri în spaţiul cu trei dimensiuni..... 164
V. Lungimile curbelor. Ariile suprafeţelor strîmbe....
165
3. *Noţiuni introductive de probabilitate.....* 167
I. Măsuri pe o mulţime de evenimente..... 168
II. Probabilităţi (Cazul mulţimilor finite)..... 170
III. Probabilităţi continue (Cazul mulţimilor infinite) 174

CARTEA A DOUA
ARITMETICĂ ŞI ALGEBRĂ

PARTEA **i: Teoria numerelor**

CAPITOLUL 1. întregii

1. ***Numărări (Analiză combinatorie)*..... 178**
2. ***Împărţirea euclidiană* 183**
3. ***Diaizibilitatea. Congruenţele*.....*de întregi* 185**
4. ***Multipli şi divizori. Numere*.....*prime* 189**
   - **I. Multipli şi divizori ai unui întreg..... 189**
   - **II. Teoremă fundamentală..... 193**
   - **III. Aplicaţii. Multipli şi divizori comuni..... 194**
5. ***Studiul numerelor prime*..... 197**
6. ***Numeraţia* 199**
   - **I. Principiul numeraţiei de poziţie..... 199**
   - **II. Reguli practice ale operaţiilor..... 200**
   - **III. Criterii de divizibilitate..... 204**
7. ***Algoritmul lui Euclid. Fracţiile*.....*de mărimi.* 207**

I. Algoritmul lui Euclid în mulţimea întregilor. . . . 207

II. Algoritmul lui Euclid în mulţimea mărimilor..

211 CAPITOLUL 2. Fracţii. Numere raţionale. Numere zecimale

I. Fracţii 218

II. Fracţii zecimale 219

III. Inelul fracţiilor zecimale în corpul numerelor raţionale 221

CAPITOLUL 3. Numere reale

1. ***Puterea submulţimilor de numere reale*..... 228**

I. Submulţimi numărabile 228
II. Puterea continuului 230
III. Supliment desp"e numerele cardinale..... 233

2.....*Logaritmi. Exponenţi generalizaţi*
235 PARTEA A II-A: Expresii algebrice. Rezolvarea ecuaţiilor

CAPITOLUL 1. Polinoame. Fracţii raţionale
I. Definiţia unui polinom 241
II. Valori numerice ale unui polinom. Divizibilitate cu *x* — a 247
III. împărţirea în inelul polinoamelor 252
1) Cit exact..... 252
2) împărţire euclidiană polinoamelor..... 256
3) Împărţirea în ordinea puterilor crescătoare 259
IV. Fracţii raţionale cu o nedeterminată..... 261
V. Polinoame şi fracţii raţionale cu mai multe nedeterminate 263
VI. Notă despre introducerea trigonometrici în problemele de algebră 265
CAPITOLUL 2. Rezolvarea ecuațiilor
I. Definiţii 270
II. Echivalenţa ecuaţiilor 271
III. Ecuaţii şi sisteme clasice..... 275

CARTEA A TREIA
ANALIZĂ

CAPITOLUL [1. Studiu) global direct al funcţiilor numerice
I. Recapitularea definiţiilor 283
II. Legea de compoziţie în mulţimea funcţiilor.... 284
III. Funcţiile fundamentale 286
IV. Funcţii compuse 290
V. Introducerea unei structuri de corp în mulţimea funcţiilor 292
CAPITOLUL 2. Studiul local al funcţiilor
I. Recapitularea definiţiilor 294

II. Continuitate şi limită..... 295
III. Derivata 298
IV. Extinderea noţiunilor de limită şi de derivată 305

CAPITOLUL 3. Trecere de la studiul local la studiul global al func. ţiilor numerice
I. Recapitularea teoremelor referitoare la funcţiile
continue derivabile 309
II. Creşterea funcţiilor derivabile..... 310

CAPITOLUL 4. Grafice
I. Studiul global 313
II. Studiul local 314
III. Studiul ramurilor infinite..... 319
IV. Noţiuni de geometrie infinitezimală a curbelor plane. Tangentă. Curbură 323

CAPITOLUL 5. Aplicaţiile teoremelor generale
I. Funcţii algebrice..... 329
II. Aplicarea studiului funcţiilor la rezolvarea ecuaţiilor 337

CAPITOLUL 6. Primitivele
I. Primitiva generală a unei funcţii..... 341
II. Interpretarea geometrică a primitivelor.... 345
III. Funcţia logaritmică şi funcţia exponenţială. . 349
IV. Noţiuni de ecuaţii diferenţiale..... 356
V. Notaţia diferenţială 362

CAPITOLUL 7. Numerele complexe
I. Introducere istorică 367
II. Corpul numerelor complexe..... 372
III. Funcţii numerice de o variabilă complexă.... 379
A) Topologie în planul complex 379
B) Variaţia argumentului de-a lungul unei curbe închise. Teorema fundamentală a algebrei (teorema lui d'Alembert) 382
IV. Scurtă trecere în revistă a aplicaţiilor numerelor

complexe 385

CARTEA A PATRA
GEOMETRIILE

PARTEA **i: Geometrie afină şi geometrie proiectivă**

CAPITOLUL 1. Geometrie afină

1. *Figurile fundamentale* 391
I. Geometrie plană, două.....dimensiuni 391
II. Geometrie în spaţiul R^3 cu trei dimensiuni.... 395
III. Teoria baricentrului..... 397
2. *Transformările punctuale afine*..... 400
I. Transformarea afină generală 401
II. Transformări afine particulare..... 402
A) Translaţia..... 402
B) Omotetia 404
C) Afinităţile..... 411
O) Proiecţia unui plan pe un altul, paralelă cu direcţia unei drepte 415
3. *Transformări liniare. Noţiunea de matrice*..... 416

CAPITOLUL 2. Noţiuni de geometrie proiectivă

I. Perspectiva unui plan pe un plan..... 427
II. Invariant referitor Ia puncte coliniare 431
III. Reperarea unui punct în geometria proiectivă 435
IV. Transformările proiective plane..... 437
V. Diviziune armonică. Fascicule armonice . 439
VI. Schiţă de introducere axiomatică directă a geometriei proiective 443

PARTEA A II-A: **Geometrii metrice**

CAPITOLUL 1. Geometrie metrică euclidiană

1. *Relaţii metrice* 450
I. Relaţii întrelungimi..... 450

II. Geometrie analitică metrică plană..... 454
III. Relaţii metrice care introduc funcţii trigonometrice 456
2. *Cercuri. Sfere* 459
I. Circumferinţă.....şi unghiuri 459
II. Puterea unui punct în raport cu o circumferinţă 466
III. Familii de cercuri 470
IV. Noţiuni despre corespondenţa prin polare reciproce 475
3. *Transformările punctuale ale geometriei metrice....* 476
I. Transformările afine în geometria metrică.... 476
II. Deplasări şi antideplasări 478
1) Introducere 478
2) Studiul intrinsec 481
A) Spaţiu cu o dimensiune 481
Bl Spaţiu cu două dimensiuni..... 482
C) Spaţiu cu trei dimensiuni 487
D) Mişcarea unei figuri nedeformabile ... 495
III. Similitudinea 498

CAPITOLUL *2.* Inversiunea. Elemente de geometrie analagmatică
I. Inversiunea ca transformare, in geometria metrică 503
II. Noţiuni de geometrie analagmatică..... 513

CAPITOLUL 3. Noţiuni de geometrii metrice neciiciidiene
I. Preliminarii 519
II. Geometria lui Lobacevski 528
III. Modelul lui Poincare pentru geometria lui Lobacevski (în plan) 536
IV. Geometrie sferică, model ai unei geometrii a lui Riemann 549

PARTEA A III-A: Conicele

I. Definiţieîn conul de revoluţie..... 547
II. Conicele în.....geometria analitică. Grad 553
III. Proprietăţi.....afine ale conicelor cu centru..... 560[1]
IV. Conicele în.....geometria proiectivă 562
V. Punct de.....vedere tangenţial 564

ANEXĂ 567
INDEX 599

SIMBOLURI GENERALE

Logică

» „implică", „atrage după sine", „are drept consecinţă[11]. Deducţie, inferenţă logică, « » „echivalent cu". Echivalenţă logică,

V „oricare ar fi" sau „pentru orice". Cuantificator universal.

3x: **„există cel puţin un *x* astfel incit". Cuantificator existenţial.**

'Teoria mulţimilor

g „aparţine lui". Apartenenţa unui element la o mulţime.

„nu aparţine lui".

C „este cuprins în". Incluziunea unei mulţimi într-o altă mulţime.

C „este cuprins strict în", sau „este cuprins", fără altă precizare.

U „reunit cu". Reuniunea a două submulţimi. 0 „intersectat cu". Intersecţia a două submulţimi.

C_{AB} CB	„complementara lui *B* în raport cu *A*". „complementara lui *B* în raport cu mulţimea de referinţă".
0	„mulţimea vidă".
Principalele mulţimi	
	mulţimea numerelor naturale
N	mulţimea întregilor relativi,
Z Q R R+ C	respectiv a numerelor raţionale> a numerelor reale, a numerelor reale
[Si) **sau** ***(R)***	pozitive, a numerelor complexe, dreapta reală.
[a,6]	interval închis, în (/?)
] a, 6 [(*²),	interval deschis, în (lî).
(Jî³), ***(Rⁿ)***	spaţii reale, cu 2, cu 3, cu *n*
Relaţii	dimensiuni.
=, =K	„echivalent cu". Semnul unei relaţii de echivalenţă.
	„egal", „neegal", „aproximativ
<	egal".
	„mal mic decît sau egal cu". Inegalitate în sens larg.
Operaţ	„strict mai mic decît" sau „mai mic decît" fără altă precizare.
+ , —, • sau X	
a ***m***	„valoarea absolută" a lui *x^B,* sau „modulul" lui *x^C.*
	„plus", „minus", „înmulţit cu".
a^q	*„a* **pe 6". Citul lui** *a* **împărţit la** *b,*

sau raportul dintre *a* şi *b.*

„*a* Ia puterea ş“, aS R^+, Puterea lui a.
„rădăcină a *n* — a a lui a", *a^B*$^+$,

Aplicaţia unei mulţimi înlr-o altă mulţime

x|f_jy	**imaginea lui *x,* prin aplicaţia *f,* este**
x— f'W,	***y = f(x). „x* tinde către L“ sau „L**
f{x) ,...,f^(x)	**este limita lui *x“.* derivata întîi, a**
%f(x)	**doua> a *n* — a a lui**
&af	***f(x).***
(X)	**„primitiva generală a lui /"(x)[11].**
	„primitiva de la *a* la *b* a lui f(x)“.

Vectori

y **sau y**	**„vector". Element al unui spaţiu vectorial**
/ *V*I sau | V |	**„lungimea" sau „modulul"**
ÂM	**vectorului V.**
	„măsura vectorului *AM* în raport
vxw	**„V înmulţit scalar cu w". Produsul scalar a doi vectori.**
V A W	**„V înmulţit vectorial cu w". Produsul vectorial a doi vectori.**

CARTEA ÎNTÎI

STRUCTURI FUNDAMENTALE

Malematica predată în şcoală cuprinde diferite părţi considerate, prin tradiţie, distincte şi mai mult sau mai puţin autonome: algebra, geometria, trigonometria etc. Din punct de vedere intuitiv, această împărţire este justificată: studiem numerele şi facem calcule, sau studiem figurile pe care le-am construit şi examinat. Dar chiar geometria analitică lasă să se presimtă că această disociere nu este absolută. Dar ce valoare logică prezintă concluziile trase la un moment dat?

Matematica modernă se ocupă mai puţin de obiectele studiate şi mai mult de structura relaţiilor dintre aceste obiecte; astfel, aproape întreaga geometrie tradiţională apare ca o *Algebră* definită ca teorie a operaţiilor; figurile devin inutile, dacă nu chiar periculoase, pentru expunerea demonstraţiilor, dar, bineînţeles, cititorul rămîne liber să-şi ajute intuiţia cu ajutorul desenelor

La aceste *structuri algebrice* trebuie adăugate *structurile topologici* de vecinătate, limită, continuitate. După aceea putem îmbogăţi conceptul de Spaţiu geometric şi putem aborda Analiza.

Cartea întîi expune structurile fundamentale şi punctul de plecare al diferitelor construcţii al căror

ansamblu constituie Matematica elementară; ea precizează sensul termenilor de bază din limbajul uzual care trebuie debarasat de un eventual conţinut

prea intuitiv; ea introduce, de asemenea, cele cîteva simboluri care stabilesc condiţiile de valabilitate ale relaţiilor. Vom folosi aceste simboluri pentru a rezuma enunţurile în formule care vor deveni astfel independente de caracterul subiectiv al limbajului pe care-1 folosim, fapt care va pune în evidenţă conţinutul logic yi matematic al acestor formule.

CAPITOLUL 1

VOCABULARUL ŞI SIMBOLURILE DIN TEORIA MULŢIMILOR. OPERAŢII

§ 1. DEFINIŢII INTRODUCTIVE

In cele ce urmează, vom studia *elemente,* de pildă numere, puncte, vectori, funcţii etc., pe care le vom reprezenta simbolic prin litere minuscule *a, b, x, f* etc; *mulţimile* de asemenea elemente vor fi atunci reprezentate prin majuscule: de exemplu, mulţimea numerelor pare *p* va fi notată cu *P,* mulţimea funcţiilor liniare *f* va fi *F,* o circumferinţă *C* va fi mulţimea punctelor sale *m* etc.

a) **într-o exprimare condensată, pentru a scrie că un element *a* aparţine unei mulţimi *A,* se foloseşte *semnul de apartenenţă* G, înlocuit uneori, la tipărire, cu un epsilon e. Astfel, propoziţia**

„punctul *m* aparţine circumferinţei 6“

se va scrie, dacă se ştie dinainte că *m* este un punct şi că *C* este o circumferinţă,

m* G *C.

Dar o mulţime, luată ca atare, poate fi ea însăşi considerată drept un element al unei alte mulţimi: de exemplu, putem considera mulţimea & a cercurilor din plan care trec prin două puncte date; putem ajunge atunci în situaţia de a scrie

***m* G *C, C* G £.**

Tot astfel, un elev *a* aparţine clasei sale *A,* care, la rîndul ei, aparţine mulţimii *â* a claselor liceului, această mulţime *â* fiind, ea însăşi, un element al mulţimii liceelor din ţară. Spunem că există o ascendenţă în *scara tipurilor* de mulţimi; iar semnul de apartenenţă indică o asemenea, ascendenţă.

***b)* Să definim acum o *submulţime* a unei mulţimi. Fie, de exemplu, o clasă A,mulţimea elevilor din acea clasă; să considerăm mulţimea *B* a elevilor din această clasă care studiază limba engleză: spunem că *B* este o submulţime a lui A. Dacă toţi elevii din clasa *A* studiază engleza, *B* este însăşi mulţimea *A.* Dar este, de asemenea, posibil şi ca nici un elev din *A* să nu urmeze engleza; spunem atunci că *B* este o submulţime *vidă.* 0 submulţime *adevărată* este o submulţime care nu este vidă.**

Definiţia unei submulţimi *B* a unei mulţimi *A* este deci următoarea:

„B* este o submulţime a lui *A"* înseamnă că, oricare ar fi elementul *a,* afirmaţia *„a* aparţine lui *B"* implică (atrage după sine) afirmaţia *„a* aparţine lui *A".

Vom scrie această condiţie cu ajutorul a două simboluri logice, V şi =—s»:

V înseamnă „oricare ar fi"; este un cuantificator.

=—* înseamnă „implică"; este simbolul inferenţei.

Atunci, oricare ar fi *a, „a* aparţine lui *B"* implică *„a* aparţine lui *A"* se scrie:

Va :o G B —-*> *a* G *A.*

Relaţia dintre *A* şi submulţimea ei *B* poate fi exprimată şi cu ajutorul unui singur simbol, fără a face să intervină explicit elementul *a.* Scriem

B* C *A

care se citeşte *„B* este inclus în *A";* simbolul C indică deci *incluziunea.* Aceeaşi, relaţie se poate scrie şi sub

forma *A ŢI B,* care se citeşte *„A* conţine pe *B“.*

Dacă vrem să precizăm că *A* conţine şi alte elemente, pe lîngă cele ale lui *B,* utilizăm simbolul *incluziunii stricte* c:

BQ A „B* strict inclus în *A“.

Aşadar, simbolul incluziunii, spre deosebire de simbolul apartenenţei, nu implică o ascensiune în scara tipurilor.

Se impune o remarcă: *tranzitivitatea relaţiei de incluziune-.*

***[C* C *B* şi *B* Q Aj —> [C C A]**

şi la fel pentru incluziunea strictă. Această inferenţă constituie una din axiomele teoriei mulţimilor (v. cap.6).

c) **Fie două submulţimi A şi *B* ale unei mulţimi *E.* Vom fi conduşi deseori să considerăm mulţimea *J* a elementelor care aparţin simultan mulţimii A şi mulţimii *B.* Această submulţime *J* se numeşte *intersecţia* lui A şi *B,* ceea ce se scrie şi se citeşte:**

J =* A *B „J* este egal cu A intersectat cu *B“.

Simbolul = înseamnă aici „(mulţimea *J)* este totuna cu mulţimea...“

Aşadar, definiţia simbolului intersecţiei A este:

Vm : *[m* e A A *B] [m* e A şi m E B],

Simbolul <=> indică *echivalenţa logică:* fiecare din cei doi membri este o consecinţă a celuilalt.

Daeă A şi *B* nu au nici un element comun, *J* este vidă. Scriem atunci

A A *B* = 0.

(Simbolul 0, care, ca formă, seamănă cu zero, este de fapt o literă scandinavă şi se citeşte „mulţimea vidă“.) Spunem, în acest caz, că A şi *B* sînt submulţimi *disjuncte.*

d) **Putem defini şi *reuniunea* a două submulţimi A şi *B,* ca submulţimea constituită din elementele care aparţin lui A *sau* lui *B, sau* simultan ambelor**

submulţimi (sau are aici sens neexclusiv). Scriem

***B* = A U *B „R* este egal cu A reunit cu *B*[r] ■**

La fel de bine putem defini reuniunea mai multor submulţimi ale lui *E,* ca fiind mulţimea elementelor care aparţin cel puţin uneia din aceste submulţimi. Un caz evident foarte important este cel în care aceste submulţimi sînt disjuncte două cîte două; spunem atunci că ele constituie o *partiţie a reuniunii lor* (ceea ce reflectă adecvat ideea unei împărţiri a lui *R).* Deseori, o asemenea reuniune de submulţimi disjuncte două cîte două se numeşte *suma* acelor submulţimi.

e) **în fine, dacă *A* este o submulţime a lui *E,* putem considera mulţimea elementelor lui *E* care nu aparţin lui *A:* această submulţime sc numeşte *complementara lui A* şi se notează CA. Definirea ei necesită un simbol pentru nonapartenenţă; se foloseşte simbolul apartenenţei tăiat cu o bară verticală.**
Aşadar

[ni 6 CA] •<*—e» [m 6E A şi *m* G *E].*

f) **Un ultim simbol care se va dovedi util, un nou cuantificator:**

„există cel puţin un“, notat simbolic cu 3 .

De exemplu, pentru a exprima că A şi *B* nu sînt disjuncte, scriem

3ni : *m* G A D *B.*

în rezumat, am introdus:

Două simboluri logice:

Simboluri din teoria mulţimilor:

G
C şi 2, C şi 3
n, U

Doi cuantificatori:

§ 2. RELAŢII DE ECHIVALENŢĂ

Se întîmplă deseori să fim determinaţi să considerăm că, dintr-un anumit punct de vedere, mai multe elemente ale unei mulţimi sînt echivalente între ele, şi aceasta pentru că, din acel punct de vedere, unul (oarecare) din ele poate fi înlocuit cu oricare din celelalte. De exemplu, dacă ceea ce ne interesează este exclusiv direcţia, două drepte paralele sînt echivalente. Sau: din punctul de vedere al restului împărţirii la 5, numerele 27 şi 32 sînt echivalente. Tot astfel, din punctul de vedere al măsurii mărimilor, fracţiile — şi— sînt echivalente.
^{3} 6

Vom conveni să rezervăm cuvîntul *echivalenţă* exclusiv pentru cazul în care sînt îndeplinite următoarele trei condiţii:

1. Fiecare element este echivalent cu el însuşi.

2.Afirmaţia că două elemente sînt echivalente nu implică precizarea în prealabil care dintre ele este considerat primul, şi care al doilea.

3.Două elemente echivalente cu un acelaşi al treilea element sînt echivalente între ele.

Să adoptăm simbolul = pentru a reprezenta o echivalenţă.

Definiţia generală a simbolului echivalenţei

1. Va, *a = a (rc fluiditate).*

2. Va, V& : [a = 6] [6 = a] *(simetrie,* sau reciprocitate).

. 3. Va, Vfe, Vc : [a = şi *b* = c] ==> [a = c] *(tranzitivitate).*

Orice convenţie care permite să se distingă, printre elementele unei mulţimi, acele elemente care vor fi considerate echivalente se numeşte *relaţie de echivalenţă.* Prin urmare, orice relaţie reflexivă,

simetrică şi tranzitivă este o relaţie de echivalenţă.

Fie o mulţime *E* în care este definită o relaţie de echivalenţă. Submulţimea elementelor echivalente cu un element *a* se numeşte o *clasă de echivalenţă:* toate elementele acestei clase sînt echivalente între ele (datorită tranzitivităţii) şi orice element *m* al lui *E* face parte dintr-o clasă şi numai din una singură (acceptînd, eventual, că *m* poate fi şi singurul element al unei clase, dacă nu are echivalenţi). *E* a devenit atunci o reuniune de clase disjuncte. Aceasta înseamnă că *o relaţie de echivalenţă definită pe E determină o partiţie alai E în clase de echivalenţă.* Mulţimea acestor clase se numeşte *mulţimea cît* a lui *E* prin relaţia de echivalenţă &. Ea se notează *EţSL.*

Fiecare clasă de echivalenţă este determinată de unul (oarecare) din elementele ei, care poate servi drept reprezentant al clasei. De exemplu, divizibilitatea cu 5 este studiul unei partiţii a mulţimii întregilor în 5 clase ale căror reprezentanţi sînt cele 5 resturi 0, 1, 2, 3, 4. în mulţimea dreptelor, o dreaptă (oarecare) aleasă dintr6 cele paralele cu ea, determină o direcţie: fiecare direcţie

constituie o clasă de echivalenţă pentru relaţia de paralelism; aceasta este deci o relaţie de echivalenţă.

Simbolurile folosite pentru o relaţie de echivalenţă sînt = şi alte cîteva simboluri similare: am folosit simbolul = ; ştim că paralelismul este reprezentat prin || ; uneori se foloseşte şi simbolul De remarcat că simbolurile ~ şi # , care semnifică „aproximativ egal cu“ sau „puţin diferit de“, nu indică o relaţie de echivalenţă, pentru că nu există tranzitivitate. Semnul indică o echivalenţă logică în mulţimea propoziţiilor.

§ 3. RELAŢII DE ORDINE

a) **în scurgerea timpului, distingem un „înainte" şi un „după“ Să folosim simbolul-^ pentru a exprima „este înaintea lui...“ Intuitiv, îi atribuim următoarele trei proprietăţi:**

Ya, Yb, Yc UEE, b^E, c^E	***a a*** **este falsă (nonreflexivitate).** ***a b*** **şi** ***b <(a*** **se exclud reciproc (nonsimetrie). [a-<** ***b*** **şi** ***b*** **X, c] =* ***a*** **c (tranzitivitate).**

Prin definiţie, orice relaţie cu aceste proprietăţi se numeşte *relaţie de ordine strictă.*

EXEMPLE. Relaţia „mai mic decît“ < între numere. Relaţia de incluziune strictă c, în mulţimea S a submulţimilor lui *E.*

b) **Dacă între elementele unei mulţimi *E* s-a definit o Telaţie de echivalenţă, se foloseşte deseori o *relaţie de ordine nestrictă* (sau *largă)* Să o reprezentăm prin Acest simbol este definit prin:**

V«, *Yb,* Vc *a^E,* *a a* este adevărată (reflexivitate)

bf~E, cţE *[a b* şi *b* a] =-> [a ,= (antisimetrie)

b şi 6^ c] «—*• [a ^ c] (tranzitivitate)

EXEMPLE. Relaţiile notate))>, C. Relaţia de inferenţa =>, în mulţimea propoziţiilor.

c) **Dacă, în mulţimea *E,* două elemente oarecare sînt compa rabile, adică dacă avem**

sau

Va, Vt, *a &E, b EE a = b* **(trichotomi**

I sau

l *b < a,*

spunem că *E* este *total ordonată* prin relaţia respectivă (relaţie de ordine totală). în cazul în care anumite elem ente nu sînt comparabile, mulţimea este *parţial ordonată.*

EXEMPLE DE ORDONĂRI PARŢIALE. în mulţimea întregilor, relaţia *„a* este multiplu al lui *b"* este o relaţie de ordine (nestrictă, dacă se consideră că numărul este şi propriul său multiplu), dar unele numere, cum sînt de pildă 2 şi 3, nu sînt comparabile.

Gările unei căi ferate sînt ordonate prin *„a* este înaintea lui *b* dacă trenul de la Paris trece prin *a* înainte de a trece prin *b";* dar gările nu sînt comparabile decît dacă sînt situate pe o aceeaşi cale ferată care trece prin Paris.

§ 4. OPERAŢIILE

Fie una sau mai multe mulţimi — de pildă, trei mulţimi: *E, E', E"* —pe care le numim *mulţimi de plecare.* Să presupunem că există o regulă care, plecînd de la trei elemente *a, a', a"* aparţi- nînd respectiv lui *E, E', E",* defineşte un element *x* al unei mulţimi *X.* Spunem

atunci că este definită o *operaţie* şi că A' este *mulţimea de sosire.* Elementele *a, a'* şi *a"* se numesc *termenii* (sau *factorii)* operaţiei. Vom studia îndeosebi operaţiile *binare,* adică cele cu doi termeni.

EXEMPLE. 1. O singură mulţime de plecare: mulţimea întregilor de un semn oarecare. Operaţia: ridicarea la pătrat. Mulţimea de sosire este tot mulţimea întregilor, dar prin această operaţie nu se obţine decît o submulţime; putem considera drept mulţime de sosire mulţimea întregilor pozitivi, sau, la fel de bine, mulţimea întregilor numiţi „pătrate perfecte".

2. Două mulţimi de plecare: mulţimea întregilor şi mulţimea fracţiilor. Operaţia: înmulţirea. Mulţimea de sosire: mulţimea fracţiilor.

3. Mulţimea de plecare: punctele de pe o dreaptă. Operaţia: trasarea printr-un punct a unei paralele la o direcţie dată. Mulţimea de sosire: dreptele unui anumit plan.

a) **Produsul a două mulţimi. Operaţia fundamentală care pleacă de la mai multe mulţimi este „produsul acelor mulţimi[41] (se mai spune şi *produsul direct* al acelor mulţimi).**

Fie, mai întîi, două mulţimi de plecare, *A* şi *B.* Să considerăm drept mulţime de sosire mulţimea *X* a perechilor (a, t) formate din cîte un element *a* al lui *A* şi un element *b* al lui *B.* Această mulţime *X* se numeşte *produsul direct* al lui *A* cu *B.* Scriem *X = A XB.*

EXEMPLU:

***A* are ca elemente pe *p, q* şi r; *B* are ca elemente pe *u* şi *o. A XB* are ca elemente perechile (p,u); (p,** P**) ; (g, *u); (q,* p); (r, u); (r,** P**).**

Desenul de mai sus este un *model* al acestei operaţii: mulţimea crucilor constituie, într-adevăr, o imagine a produsului direct al mulţimii punctelor negre cu

mulţimea punctelor albe.

ALT EXEMPLU. Fie mulţimea perechilor formate dintr-o abscisă şi o ordonată, în geometrie analitică plană: acest produs direct al celor două mulţimi de numere reale are ca imagine mulţimea punctelor din plan care au aceste numere drept coordonate: fiecărei perechi de numere îi corespunde un singur punct, şi reciproc, fiecărui punct îi corespunde o singură pereche de numere. Exprimăm aceasta spunînd că există o *corespondenţă biunivocă* între mulţimea perechilor şi mulţimea punctelor din plan. (Se mai spune şi „corespondenţă unu la unu" precum şi „corespondenţă 1 ; 1". Noţiunea de corespondenţă biunivocă este fundamentală, şi ea este cea care permite folosirea modelelor, a imaginilor.)

Tot astfel, dacă *a, b, c* aparţin respectiv cîte uneia din mulţimile *A, B, C,* produsul *A X B X C* este mulţimea triplcţilor *(a, b>,* c).

b) **Operaţii interne. Fie o mulţime *E* şi mulţimea perechilor (a, *b}* de elemente ale acestei mulţimi, adică produsul lui *E* cu**

ea însăşi: *E* X *E.* O operaţie binară care face să corespundă fiecărei perechii (a, *b)* un element al Iui £ se numeşte *operaţie internă* definită pe £..

EXEMPLE. Pe mulţimea întregilor —adunarea, sau înmulţirea . Pe mulţimea fracţiilor (excluzînd pe zero) — împărţirea. Pe mulţimea vectorilor (v. cap.3) —suma.

Mulţimea vectorilor conduce însă şi la un alt tip de operaţie, înmulţirea unui vector cu un număr face să corespundă fiecărei perechi formate dintr-un vector şi un număr, un alt vector. Mulţimea numerelor este considerată aici ca fiind mulţimea operatorilor care acţionează asupra vectorilor. Se numeşte *operaţie externă* o operaţie faţă de care mulţimea de sosire este una din mulţimile de plecare, iar cealaltă este o *mulţime de operatori.*

Să considerăm: o operaţie internă pe £. Ea se numeşte şi *lege de compoziţie internă între elementele lui E.* (Se compun două elemente ale lui £ pentru a obţine un al

treilea element.)

Dacă o operaţie o este o operaţie internă pe o submulţime *A* a lui £, spunem că *A* este *închisă* pentru această operaţie (fiindcă operaţia nu ne scoate din J4).

Fie o o operaţie internă definită pe £■ Convenim să notăm în modul următor rezultatul operaţiei efectuate asupra elementelor *a* şi *b:*

$$a \circ b = r.$$

Deoarece- *r* aparţine Iui £, acest element poate fi luat el însuşi drept *termen* al operaţiei (sau *factor* al operaţiei). Vom avea, de exemplu

$$O \circ b = T,\ T \circ C = s_t$$

cu alte cuvinte, operaţia poate fi reiterată, repetată.

CONVENŢIE DE SCRIERE:

[« O J = r şi r O e = j] [(ao i) OC = $_s$]

şi, convenind să suprimăm paranteza la stînga,

$$a \circ b \circ c = s.$$

Tot astfel,

aob°eo(loe* înseamnă (^{r}(fl ° t) ° c) o d) o *e.

REMARCĂ IMPORTANTĂ. Dacă nu există o indicaţie contrară, atunci *informaţia despre operaţiile de efectuat se citeşte de la stingă la dreapta.*

***c)* Proprietăţi ale operaţiilor**

Multe dintre operaţiile pe care le vom întîlni verifică proprietăţile următoare (notăm elementele echivalente cu semnul =):

[A_x] *[a = a' şi b* = t'] =*• [a o *b = a'* o 6']

„Două elemente echivalente se pot înlocui unul pe altul în calitatea de termen al operaţiei". — „Două egalităţi pot fi „operate" (compuse) membru cu membru". Echivalenţa şi adunarea sînt compatibile între ele.

[A_2] [a o *b = a' o b]* =&• [a = *a']*
simplificare la dreapta

[A_2]

[A_2] *[a o b = a* o 6'] => [6 = Z>'j
simplificare la stînga

[A_s] aojoc =ao (ioc) asociativitate pentru 3 termeni

| [A_4] *a o b = b o a* comutativitate pentru 2 termeni.

REMARCĂ. Deoarece echivalenţele precedente sînt, prin definiţie, simetrice, ele pot fi citite în ambele sensuri; de exemplu, [A_s] arată că paranteza din membrul al doilea poate fi suprimată.

De fiecare dată cînd va fi definită o operaţie pe o mulţime, va trebui să studiem dacă aceste proprietăţi sînt sau nu adevărate (de exemplu, împărţirea în mulţimea numerelor fracţionare nu este, evident, comutativă!). Să mai remarcăm că dacă [A_4] este adevărată, [A_2] şi [A_2] sînt echivalente şi constituie condiţia *simplificării bilaterale* [A_2].

Consecinţe ale proprietăţilor [A]

[CJ ASOCIATIVITATE PENTRU TERMENI CONSECUTIVI. Orice grup de termeni care se succed pot fi cuprinşi într-o paranteză.

Aceasta este o consecinţă a proprietăţilor [Ai] şi [A_3], şi ea nu presupune proprietatea [A_4].

Fie, de exemplu, că vrem să trecem de la

***aobocodoeof= s* la**

$$a \circ b \circ (_c \circ d \circ e) \circ f.$$

Folosind, după nevoie, cînd definiţia şi proprietatea [-AJ, cînd [A_3], vom scrie

$$s = [(a \circ t \circ c) \text{ od oe}] \circ / = [(a \circ 6 \text{ oc}) \circ (J \circ {}_e)] \text{ of}$$

$$= [(a \circ 6) \circ c \circ (d \circ e)] \circ f$$

$$= [(a \circ 6) \circ \text{ţc} \circ (d \circ e)\}] \; of = a \circ b \circ (c \circ (d \circ e)\} \circ f$$

$$= a \circ b \circ \{c \text{ od } o \; e\} \circ f.$$

[C_2] COMUTATIVITATE COMPLETĂ. Termenii pot fi aranjaţi într-o ordine complet arbitrară.

Aceasta este o consecinţă a proprietăţilor [A_x], [A_3] şi [A_4]. Pentru a ajunge la ea, parcurgem două etape.

1. *Putem inversa ordinea a doi termeni consecutivi.*

EXEMPLU. Vrem să trecem de la

s=aobocodoeofog* la *aobocoeodofog.

Folosim definiţia, apoi pe [A_a] şi după aceea pe [A_4]:

$$s = [(a \circ b \circ c) \circ (d \circ e)] \; » f » g$$

$$= [(aoboc\}o\{eod)]ofog=aobocoeodofog.$$

(Cu titlu de exerciţiu, cititorul îşi poate propune să explice în cazul general procedeul care reiese din acest exemplu.)

2. *Putem scrie termenii într-o ordine arbitrară.* într-adevăr, putem inversa anumiţi termeni consecutivi în aşa fel încît un termen, care se află în locul dorit, să nu mai fie deplasat cu ocazia acestor inversiuni; este suficient pentru aceasta, să aducem în una din

extremităţi termenul care vrem să fie primul (de pildă, la extremitatea din stînga), apoi pe cel imediat următor şi aşa mai departe. Se poate prevedea uşor numărul maxim de interver- siuni necesare.

[C_3] ASOCIATIVITATE COMPLETĂ. Oricare termeni pot fi grupaţi într-o paranteză.

Aceasta rezultă din proprietăţile [A], fiindcă, conform consecinţei [C_2], termenii vizaţi pot fi plasaţi primii din stingă.

în continuare, ori de cîte ori vom fi verificat că proprietăţile [A] sînt satisfăcute, automat consecinţele acestea vor fi presupuse valabile.

DEFINIŢIE. Se numeşte *element neutru* orice element « care verifică

V a : a o n = a şi n o « *= a-*

Dacă operaţia este comutativă, aceste două condiţii sînt una consecinţa celeilalte.

Dacă există, acest element este unic, conform Iui [AJ,

căci [n°n'=n şi non' = n']^>[n = n'].

EXEMPLE. Pentru adunarea numerelor, elementul neutru este numărul zero, pentru înmulţire —numărul unu.

CAPITOLUL 2

NUMERELE

Deseori, elementele unei mulţimi sînt numite *puncte,* fiindcă ■sînt considerate indecompozabile. Cînd însă mulţimea este înzestrată cu operaţii interne, ele sînt numite mai curînd *numere,* prin ■extensia cuvîntului număr care se aplică la întregii naturali.

•■§ 1. ÎNTREGII NATURALI

Cînd numărăm obiecte, folosim întregii naturali; experienţa este cea care ne arată ce anume putem număra în felul acesta: obiectele trebuie să nu se topească, să nu se evapore, să nu se lipească între ele etc. întregii naturali sînt adecvaţi pentru această operaţie fiindcă posedă anumite proprietăţi binecunoscute, îi vom defini acum pe cale axiomatică printr-un ansamblu de proprietăţi care este suficient pentru a deduce din el pe toate celelalte. (Semnalăm că există o oarecare libertate în alegerea acestor axiome, fapt care permite şi alte expuneri axiomatice.)

Axiome care definesc mulţimea *N* a întregilor naturali.

I. Adunarea

în mulţimea *N* se dă o operaţie internă, numită adunare (şi notată +), care asociază fiecărei perechi (a, *b)* de elemente din JV, un alt element *a* -j- *b* numit *sumă.*

Această operaţie verifică proprietăţile [A] din cap.l, ceea ce, în cazul de faţă, se scrie

[Aj] ***[a = a' şi b = 6']*** **[a 4* *b = a'* -J- 6']. [A 1**

I + b : a' + =

aJ ***/[a+ b = a*** 4-**i']—> [6= 6']**

[A_3] *a* 4- *b* 4- c =a4~ **(*b*** 4" **c)**

[A_3] ***a*** 4- ***b*** **- *b*** 4~

Din ele decurg consecinţele [Cj: comutativitatea completă şi asociativitatea completă.

n. Relaţia de ordine

DEFINIŢIE. Fie o pereche (a, 6) de elemente din A^7: dacă există un element *d* din *N* astfel încît *a* 4~ **d —*b,* spunem că *a* este mai mic decît *b,* şi scriem *a < b.* Aşadar**

[a* < 6]** *=*• **[3d : *a 4- ***d*** **=6],**

Axioma [0] a trichotomiei. Pentru fiecare pereche (a, *b)* de elemente din *N,* avem

a = b,* sau *a < b,* sau *b < a,

aceste trei cazuri excluzîndu-se reciproc.

Rezultă de aici că această relaţie este o *relaţie de ordine totală* pe *N,* ordinea fiind *strictă.* într-adevăr, relaţia nu este nici reflexivă, nici simetrică. Să demonstrăm că ea este tranzitivă:

a < b* <=> 3 d : *b = a 4- ***d*** 1 ═ $\begin{cases} c = a + (d + \end{cases}$

b < c* 3 *d'* : c *= b 4- ***d'*** **j (conform lui** [A])

prin urmare, *a < c.*

CONCLUZIE. Mulţimea *N* este total ordonată prin relaţia <- în loc de a < *b,* convenim să scriem *b > a;* relaţia > se numeşte relaţia *inversă* celei precedente şi

este, şi ea, o relaţie de ordine totală; ea se citeşte „mai mare decît".

Relaţia se citeşte „mai mic, sau egal cu" (ordine nestrictă); iar se citeşte „mai mare, sau egal cu".

Relaţiile *a < b* şi *u > v* se numesc inegalităţi de *sensuri contrare.*

CONSECINŢE

a)* Diferenţa. Fie *a* < 6; pentru a exprima în alt mod că 3d, *b = a + d,* scriem *3d, b — a = d.

Operaţia care asociază perechii (a, *b)* numărul *d* se numeşte *scădere.* Ea este definită *în N,* dar nu *pe N,* fiindcă nu se poate aplica tuturor perechilor: operaţia *b* — a nu este definită decît pentru *a < b.*

PROPRIETĂŢI ALE DIFERENŢEI. Ele rezultă din [A] şi [0],

Unicitate

[6 - *a* - - *d'J [b = a + d'J*] +dl] _=J, (conform w Msl).

Proprietăţi

Numărul *d se* numeşte *diferenţa* între *a* şi *b.*

[Dj] *b — a = (b + m)* — (a + m), Vm £ *N.*

ENUNŢ. Dacă celor doi termeni ai unei diferenţe li se adaugă un acelaşi număr, diferenţa nu se schimbă.

Altă formă a teoremei:

m **[P < 0 <*] =- [6 — *a = (b — p)* — (a** •p)L
a + *(b — c) = + b* — c
tr> ***a*** **_*(b*** 4-c) = ***— b — c***
a* — (6 — c) = 4- *c — b* şi, de *= a —
în cazul în care *b < a.*
(b -a) + (&' - **a') =(fc *+b')* — (a 4-**

PRINCIPIUL DEMONSTRAŢIILOR. *Pentru a demonstra o egalitate, putem demonstra egalitatea care se obţine adăugind celor doi membri un acelaşi număr.* într-adevăr, conform lui ML

[u = v] •*—► [u + *k* = *v* + *k]*

şi demonstrăm

ţDJ — luînd *k* =*a* + *m,* [D_2] — luînd *k* = *c,* [D_3] —luînd *k* = *b* + *c,* [D_4] — luînd *k* = *b* — c şi folosind [Di], [D_8] — luînd *k* = *a* +a' ■

***b)* Proprietăţi ale inegalităţilor**

[/j] [a < 6] ■=> [a 4- *m* < *b* 4* m], *'im* G *N.*

ENUNŢ. Dacă adunăm celor doi membri ai unei inegalităţi un acelaşi număr, obţinem o egalitate de acelaşi sens.

[/;] [p < a < b] =*■ [a — p < b — p]

***[/₂] [a < b* şi *a' < b'] ■=>* [a + *a' < b + b'*|**

ENUNŢ. Adunînd membru cu membru două inegalităţi de acelaşi sens, obţinem o inegalitate de acelaşi sens.

Demonstraţii —cu ajutorul lui [Dj] şi [D_5].

III. Bine ordonare

Structura definită de axiomele [A] şi [O] este încă prea generală-

1. Trebuie s-o precizăm prin axioma următoare:

[BO] Axioma de bine ordonare. *Orice submulţime a lui N care nu este vidă conţine un element mai mic decît toate celelalte.*

De unde, în particular:

Axioma primului element. *Mulţimea N are un element mai mic decît toate celelalte.* II numim „unu" şi îl reprezentăm prin 1_

CONSECINŢĂ. în submulţimea formată din toate elementele *x*- astfel îneît *a < x,* adică astfel îneît *Jy : x = a + y,* există u» clement cel mai mic. Acesta este *a* + 1 căci

[1 *b]* ==> [a + 1 *a* + t] conform lui [IJ.

De aici deducem *şirul* numerelor naturale 1, 1+1, 1+1+1 etc. (Cuvîntul etc., care în matematică este înlocuit cu simboluP ..., arată că operaţia trebuie repetată. Un *şir* este o mulţime — notată, în general, cu u_1; u_2, u_3, ... —care este în corespondenţă biunivocă cu mulţimea întregilor.)

2. Pentru a obţine o concluzie valabilă pentru *orice element* al[1] lui *N* vom folosi teorema următoare care este extrem de importantă :

Teorema demonstrării prin recurenţă. Fie că este vorba de o- proprietate care, pentru un număr *a* G A[7], nu poate fi decît sau adevărată, sau falsă. Să presupunem că vrem să demonstrăm căi ea este adevărată oricare ar fi a g *N.* Care sînt ipotezele care ne? permit să tragem această concluzie?

ENUNŢUL TEOREMEI. ***Dacă ştim că:***

1) ***Proprietatea este adevărată pentru a*** **=1;**

2) ***Dacă proprietatea este adevărată pentru a = p, ea este adevărată şi pentru a = p*** 4~ 1, ***şi aceasta oricare ar fi p, şi, în particular, pentru p*** = 1;

Putem conchiUe că proprietatea este adevărată pentru orice număr din N.

Ceea ce se scrie:

1. **Adevărat pentru *a* =1.....**
2. **[VpgA[r]: adevărat pentru a=p]=s-[adevărat pentru a=p-(-l]**

$\Big\} \Longrightarrow$

[adevărat *'ia* G 2Vj.

DEMONSTRAŢIE. Să repartizăm elementele din *N* în două sub- mulţimi, *V* — care conţine toate numerele din *N* pentru care proprietatea este adevărată, şi *F* —care conţine toate numerele pentru care proprietatea este falsă. Vom arăta că, admiţînd ipotezele 1. şi 2., este imposibil ca *F* să nu fie vidă.

într-adevăr, dacă *F* nu este vidă, atunci, conform axiomei [BO], •ea conţine un element cel mai mic, *q.* Acest număr *q* nu este egal cit 1, conform primei ipoteze; deci el este mai mare decît *1* şi numărul *q* — 1 există. Atunci, din însăşi definiţia lui *q,* acest număr *q* — 1 aparţine lui *V*; dar ipoteza 2. implică atunci că şi *(q* — 1) +1 = *q* aparţine lui *V,* ceea ce este în contradicţie cu definiţia lui *q.* Prin urmare *q* nu există şi *F* este vidă. Altfel spus, toate numerele aparţin lui *V.* Q.E.D.

De reţinut că tocmai aceasta este teorema care justifică enunţul: *■orice număr a* G *N este o sumă de termeni egali cu* 1; într-adevăr, dacă afirmaţia este adevărată pentru *a = p,* ea este adevărată şi pentru *a = p* +1.

REMARCĂ. Teorema permite să se efectueze o verificare, dar nu şi să se descopere o formulă. De pildă, demonstrăm formulele

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$S_{rt} = l^2 + 2^2 + 3^2$ 4~ ... + n^z = — n(n4- l)(2n 4" 1), Vn întreg, G

verificînd S_r = 1, Si = 1, $S_{,+1} = S_n$ 4" (« 4" 1), $S_{/i+1} = S_n$ 4- (n 4- l)²-

3. Numărul cardinal al unei submulţimi a lui *N*

Am spus ce este o *corespondenţă biunivocă între două mulţimi:* o corespondenţă prin care fiecărui element al unei mulţimi îi facem să corespundă un element şi numai unul al celeilalte mulţimi, şi reciproc. Dacă o mulţime este în corespondenţă biunivocă cu mulţimea JV, spunem că mulţimea aceea este un *şir*; elementele ei pot fi notate u_{lf} u_2, ..., u_n, ... Se spune, de asemenea, că această mulţime are *puterea infinitului numărabil.* Aşa stau lucrurile, de exemplu, cu mulţimea numerelor pare *a + a (a* G AT), fiindcă lui *a + a* îi corespunde în mod biunivoc a; notăm $u_n = In.$

0 submulţime a lui JV se numeşte *finită* dacă are un element cel mai mare, un element maxim: de exemplu, submulţimea elementelor *x* definite prin *x* < 6 este o mulţime finită; elementul eimaximeste6 —1 = 5. Dar submulţimea constituită de numerele pare nu este finită.

Fie *A o submulţime finită* nevidă a lui A^T. Ea este bine ordonată, aşa cum este şi *N,* şi elementele ei pot fi înşiruite

$$a < b < c < ... < p < q;$$

elementului *a* îi putem asocia numărul 1, lui *b* numărul 1+1, lui *c* numărul 1+1+1 etc. Numărului *q* îi corespunde un număr bine determinat *n* (fiindcă putem aplica mulţimii elementelor *a, b, c, ..., q* raţionamentul prin recurenţă) şi ştim că *n* este cel mult egal cu *q* + 1 — *a* (egalitatea se realizează numai cînd *a, b, c, ... , q* sînt consecutivi în A).

Numărul *n* se numeşte *numărul cardinal ataşat mulţimii A;* spunem de asemenea că *n este numărul de elemente din A.*

Mai general, fiind dată o mulţime oarecare *B,* dacă putem defini o corespondenţă biunivocă între *B* şi o submulţime finită *A* a lui *N,* numărul cardinal al lui *A* se

numeşte numărul de elemente din *B. B* se numeşte atunci o *colecţie de obiecte* şi *n* este *numărul de obiecte din colecţie.* Colecţiile cele mai importante sînt: colecţia de simboluri din numeraţie, care se scrie 1, 2, 3, ..., şi cea de cuvinte din numeraţia vorbită.

Relaţia între două mulţimi: „au acelaşi număr cardinal" este o relaţie de echivalenţă (fiindcă existenţa unei corespondenţe biunivoce este tranzitivă); ea se numeşte *eckipotenţă.* (Cartea a Il-a, cap.3.)

APLICAŢIE LA REUNIUNEA ŞI LA INTERSECŢIA A DOUĂ MULŢIMI FINITE. Fie *A* şi *B* două submulţimi finite ale unei mulţimi *E,* şi fie *n* şi *m* numerele lor cardinale. Dacă *A* şi *B* sînt disjuncte, reuniunea lor *R* are ca număr cardinal pe *r = n + m.* (Am spus că în asemenea cazuri se foloseşte adesea cuvîntul „sumă" în loc de cuvîntul „reuniune[11].) Dacă, din contra, intersecţia *J* a lui A cu *B* nu este vidă, ea are un număr cardina *j* şi avem

$$n + m = r + j.$$

Dacă *B* este inclus în *A,* intersecţia este *B,* şi deci *j =m, r = n;* mulţimea *D* a elementelor din *A* care nu aparţin şi lui *B* conţine *d = n —m* elemente; numim^pe *D diferenţa submul- ţimilor A şi B.*

Aşadar

$$A \subset E /$$

$$A \cap B = 0 \iff [n + m = r]$$

$$[B \subset A] \iff [j = m,\ n = r,\ d = n - m].$$

Prin urmare, dacă vrem să reprezentăm suma a doi întreg naturali prin operaţii asupra colecţiilor, trebuie să luăm mulţimi disjuncte; pentru a reprezenta o diferenţă, trebuie să luăm două mulţimi dintre care una este inclusă în cealaltă.

TABLA ADUNĂRII. Să luăm ca imagine a întregilor naturali segmente succesive ale unei linii şi ale unei coloane din plan. Imaginea produsului acestor mulţimi este mulţimea căsuţelor caroiajului ; căsuţei intersecţie a coloanei numerotate a şi a liniei numerotate *b* îi atribuim numărul *a + b,* şi analog pentru toate căsuţele.

Se vede uşor ce interpretare au axiomele [A] în cazul acestui tabel.

	1	**2**		***a***	
1	**2**	**3**		***a*** **-J-1**	
2	**3**	**4**		**a + 2**	
b				***a*** **+ i>**	

IV. înmulţirea

1. Vom aiăta acum că în mulţimea *N* studiată, înzestrată deja cu operaţia de adunare şi cu relaţia de ordine, există posibilitatea de a defini o a doua operaţie care satisface condiţiile [A] şi încă două axiome care exprimă relaţia dintre această operaţie şi adunare. Numim această operaţie *înmulţire* şi o semnalăm printr-un punct, la care, de altfel, se renunţă adesea: scriem *a' b* sau *ab.* Rezultatul este un număr care se numeşte *produs,* iar *a* şi *b* sînt *factorii* produsului.

AXIOMELE ÎNMULŢIRII

[jfi] [a = a' şi *b = b'] ==> [ab = a'b']*

[yl$_2$] *[ab = ab'] ==> [b = b']; [ab = a'b] [a = a']*

[yl$_3$] ***abc = a[bc)***

[J4$_4$] ***ab = ba***

a[b + b') = [ab) 4* ***[ab'): distributivitatea* înmulţirii în raport cu adunarea a 2 termeni.**

[.W$_2$] ***a* • 1 = 1 • *a = a.***

Numărul 1 este *elementul neutru* pentru înmulţire.

REMARCĂ, *[ab) + [cd)* se scrie fără paranteze *ab* 4* *cd,* făcînd convenţia de a suprima parantezele care nu conţin decît un singur produs.

CONSECINŢĂ: *Distributisntatea generală pentru n termeni*

[A/i] *a[b* -Ţ- ***c*** 4” •.. 4~ ***k) =■ ab*** 4“ ***ac*** -ţ- … -ţ- ***ak.***

Ea se demonstrează prin recurenţă; într-adevăr, dacă ea este adevărată pentru *p* termeni, ea este adevărată şi pentru *p* + 1 termeni, datorită asociativităţii adunării. De aici — formula pentru înmulţirea unei sume cu o sumă.

2. Trebuie deci să demonstrăm *existenţa* şi *unicitatea* operaţiei care are proprietăţile dorite, în mulţimea *N.*

Pentru a obţine un produs *ab,* să considerăm pe *b* drept o sumă de *b* termeni egali cu 1 şi să folosim [Afj] şi [Af$_8$J:

***b* =1 -ţ-1 + ... 4" 1 *ab = a* 4~ *a* 4~ ••• 4~** G
(6 termeni) (4 termeni)

Prin urmare-,. sin gemi număr care poate fi convenabil pentru p = ab este suma a b numere egale cu a. **Răniîne să demonstrăm, că acest număr *p* satisface, intr-adevăr, toate axiomele formulate.**

Faptul este imediat pentru [-*4*] şi pentru [Af$_2$]. Asociativitatea adunării dă imediat pe [Afj], iar relaţia de ordine dă pe [A$_2$J.

[jf$_3$j: rezultă din [Af,] căci

(ab'je - ab + ab **-ţ- ... +** ***ab*** **(c termeni).**

a{be) = a{b **4~** ***b*** **-J- ... +6) (c termeni).**

Demonstrarea lud [2f$_e$] cere descompunerea lui a şi a lui *b* în sume de termeni egali cu 1:

ab = **-ţ-** ***a*** **-J- ... 4- a) = (1 4 1 + 1 4" ••• 4*1) + (1 +1 4~**
'.b termene)
+ 1 4- - 4- 1) 4- - 4- (1 4-1 + 1 4- - 4-1).
(fiecare partesi conţine a termeni)**

O altă grupare-a termenilor dă *b* termeni 1 situaţi în fiecare din cele *a* poziţii din fiecare paranteză; prin urmare

b **4“** ***b*** **4" 4~** ***b = ba.***
(a termeni)

Putem face- şi un raţionament prin recurenţă,căci,

pentru 6=1» avem într-adevăr *a* • î = 1 • *a,* şi

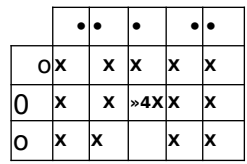
Pap = *pa]* [a(p 4- 1) = (p 4" l)a]»

Intr-adevăr,

«(p 4-1) = *ap* 4- *a = pa* 4- 1 • *a* = (p 4- p 4- ... 4- p) 4- + (1 4-1 4-1 4? —• 4-1) = (p 4- 1) 4- (p 4* 1) + ••• + (p 4-1) =

= (p + !)«•

REPREZENTAREA UNUI PRODUS PRINTR-UN PRODUS DE MULŢIMI. Să considerăm întregii a şi 6 drept numerele de obiecte din două colecţii, de exemplu, o colecţie de puncte negre şi una de puncte albe.



Numărul de obiecte din mulţimea produs verifică perfect axiomele enunţate. De altfel, se poate verifica că el satisface definiţia genetică pe care am dat-o:

***ab =a + « + ... + a [b* termeni).**

Axiomele [Aj], [A_4] şi [Af_2] se verifică imediat.

Axioma [Afj] rezultă din cele spuse despre reuniunea mulţimilor disjuncte. [A_2] rezultă din relaţia de ordine.

Pentru a verifica pe [A_3] trebuie, evident, lucrat cu tripleţi, nu cu perechi. Putem face o reprezentare în spaţiu: a calcula pe *[ab)c* sau pe *a(bc)* înseamnă a număra căsuţele din spaţiu în grupuri care sînt reuniuni de submulţimi disjuncte şi formează una sau alta din cele două partiţii posibile (de pildă: partiţia în straturi orizontale, sau în straturi verticale).

Această reprezentare ne poate scuti de o demonstraţie penibil de greoaie.

Cele de mai sus justifică folosirea expresiei „mulţimea-produs" fiindcă, în cazul mulţimilor finite, numărul cardinal al mulţimii- produs este produsul

numerelor cardinale ale mulţimilor-factori.

TABLA LUI PITAGORA. Tabla înmulţirii, ca şi tabla adunării sau cea a oricărei operaţii binare, are forma de tabel cu două intrări; în ea vom regăsi proprietăţile [A] şi [A/].

3. ÎNMULŢIREA ŞI RELAŢIA DE ORDINE. Din proprietăţile [/] ale inegalităţilor referitoare la adunare deducem proprietăţile referitoare la înmulţire.

[J_x] Dacă *b* nu este egal cu 1, *a < ab.*

[J_2] [a < 6] =-#■ *[am < bm, 'im* G A'j

(înmulţirea celor doi membri ai unei inegalităţi cu un acelaşi număr).

[J_8] *[a < b* şi *a'* < 6'] *=> [aa' < bb']*

(înmulţirea membru cu membru a două inegalităţi de acelaşi sens).

DEMONSTRAŢII. [Jjl rezultă din proprietăţile adunării, iar (J_2] rezultă din [J_2j. In ceea ce priveşte [J_3], scriem

[a < 6] —s> *[aa' < ba']* 1

[a' < &'] =£» [ba' < ba']] [aa' <

REMARCĂ. Adunarea nu este distributivă faţă de înmulţire- într-adevăr,

(a -|- 6) • (a + c) = *aa* 4- *ac + ba + bc > aa* 4* *bc a* 4* *bc.*

V. Mulţimea JV a întregilor naturali este arhimedeană.

Prin definiţie, *b < a* asigură existenţa unui număr d în aşa fel incit să avem *a = b d.* în general, nu există un număr y astfel încît să avem *a = bq* (fapt care se vede din tabla lui Pita- gora). Şirul *b, 1b, 3b, ...* al *multiplilor* lui *b* nu conţine toate numerele; dacă *a* nu este unul din elementele acestui şir, vom arăta acum că şirul conţine totdeauna numere mai mari decît *a.*

Proprietatea lui Arhimede (numită nneori şi *axioma lui Arhi- mede,* fiindcă în unele expuneri această

proprietate este luată drept axiomă).

Oricare ar fi numărul a mai mare sau egal cu b, există totdea-

una sau un număr q ***încît a = bq, sau un număr q incit***

$$bq < a < b(q\ 4^*\ 1).$$

Altfel spus

Va, V6, ***a*** ***b:*** | ***3q : a = bq***

sau

$$. 3q : bq < a < b(q\ 4\sim\ 1)\ \bullet$$

Este clar că cele două cazuri se exclud reciproc şi că, dacă *q* există, el este unic. Vom arata în continuare, folosind un raţionament prin recurenţă, că orice număr *n* din 7V verifică proprietatea că „este depăşit de şirul multiplilor lui *b*".

Numărul 1 are, evident, această proprietate, fiindcă 1 < *b* 4~ 4~ 1 < 26.

Fie atunci *p* un număr care are proprietatea investigată:

$$3k : p < bk.$$

Din ea deducem

$$p\ 4\text{-}1 < bk + 1 < bk\ 4\text{-}\ 6 = b(k\ 4\text{-}\ 1);$$

aşadar, *p* 4- 1 [ar]e şi el această proprietate.

Prin urmare, orice număr întreg natural « este depăşit de multiplii lui *b.* Dacă notăm cu *bk* multiplul cel mai mic al iui *b* ■care depăşeşte pe *a,* atunci

$$[a > 6] =^* [^* > 1]$$

şi

$$b(k — 1)\ a < bk.$$

Prin urmare, numărul *q = k* —1 verifică

$$bq < a < b(q\text{-f-}\ 1).$$

Această teoremă constituie punctul de plecare a'l teoriei întregilor naturali (v. Cartea a Il-a: Aritmetica).

•REMARCĂ. Orice submulţime infinită a mulţimii întregilor naturali este arhimedeană.

DEFINIŢIE. Dacă un număr *m* este mai mare sau egal cu fiecare element al unei mulţimi ordonate, *m se* numeşte un *majorant •al mulţimii-,* mulţimea este majorată de *m.* Dacă un majoram aparţine mulţimii, înseamnă că el este elementul ce'l mai mare al acelei mulţimi. Am văzut, în cele de mai sus, că ş.jrwf *multiplilor unui întreg natural nu este majorat.*

2. NUMERE RELATIVE. SIMETRIZARE

Am dat, în cele precedente, caracteristicile numerelor naturale. Ştim că, printr-un fel de dedublare numită *sime-triza/re,* sîntem ■conduşi să considerăm întregi pozitivi şi întregi negativi, care, împreună cu zero, constituie *mulţimea întregilor relativi.* Prin •contrast, vom spune că întregii naturali sînt *absoluţi.*

Mai general, simetrizarea aceasta poate fi efectuată pe mulţimi imai generale de elemente, numite „absolute[41] —cu condiţia însă să se renunţe la axioma de bine ordonare —aşa că studiul sime- 'lri?arii ar putea fi plasat ceva mai departe, de pildă, după introducerea numerelor raţionale.

Mulţimea numerelor pozitive nu are aceeaşi definiţie ca mulţimea numerelor absolute, dar deoarece structurile lor sînt *izomorfe,* ■ele sînt deseori confundate în vorbire, printr-un abuz de limbaj. (Spunem 4, în loc de 4.) Fireşte, această confuzie de termeni nu este permisă la începutul studiului teoretic pe care-1 întreprindem acum.

I. Noţiunea de izomorfism a două structuri

Fie două mulţimi: *E* de elemente *a, b, c, ...* şi *E'* de elemente *a',b',c', ...;* să presupunem că între elementele acestor mulţimi a fost definită o corespondenţă biunivocă: spunem că *a'* este imaginea lui *a, b'* este imaginea lui *b* etc. Dacă în *E* este definită o operaţie o, putem introduce în *E'* o operaţie o' imagine a lui *o* prin condiţia că rezultatul operaţiei *o'* asupra unei perechi

oarecare *(m', p')* este imaginea rezultatului operaţiei o asupra perechii (m, *p}*. Toate proprietăţile lui *o,* cum sînt de pildă comutativitatea, sau asociativitatea, vor fi transmise operaţiei imagine o'. Prin urmare, prin aceste operaţii, mulţimile *E* şi *E'* vor fi înzestrate cu structuri analoage, care sînt una imaginea celeilalte şi nu diferă decît prin notaţii. Dacă faptul nu riscă să creeze confuzii, putem chiar folosi unul şi acelaşi simbol pentru a nota operaţiile *o* şi o', ceea ce va face ca, formal, calculele să fie aceleaşi în *E* şi în *E'*. Spunem că cele două operaţii introduc *structuri izomorfe* pe *E* şi pe *E',* sau că *E* şi E^1 *sînt izomorfe pentru operaţiile o* şi *o'.*

Tot astfel, dacă în *E* şi în *E'* sînt definite cîte o structură de ordine astfel încît

„m* este înaintea lui este înaintea lui *p'",

atunci cele două mulţimi sînt izomorfe în raport cu aceste relaţii de ordine.

II. Extensie prin simetrizare

Scopul nostru este să definim o mulţime *Z* suficient de cuprinzătoare pentru ca una din submulţimile ei să fie izomorfă cu mulţimea *N* a întregilor naturali pentru adunare şi relaţia de ordine —şi deci, şi pentru înmulţire —şi să fie astfel încît scăderea să fie *totdeauna* posibilă. Este ceea ce sc numeşte a face o *extensie a lui N prin simetrizare.*

Vom preciza axiomele utilizate: axioma de bine ordonare nu intervine decît la sfîrşitul studiului.

Axiome care definesc mulţimea *Z*

***a)* Axiome referitoare la o primă operaţie numită adunare**

(notată +)

1. Axiomele [A], din care decurg consecinţele [C].

2. Axiome creatoare de elemente noi:

[Sj] Există un element neutru pentru adunare, numit *zero* şi notat 0.

Aşadar

0 £ *Z ;* "HO = 0 "4" *a = a, Va £ ?V.*

[S_2] Fiecare element *a* din *Z* este asociat cu un element *a′* astfel incit

$$a \text{ -ţ- } a^f = 0.$$

De remarcat că elementul asociat lui 0 este 0 şi că

[a′* = 6] *[b′* = a], adică (a')' *= a.

Spunem că *a* şi *a′* sînt *simetrice pentru adunare;* spunem de asemenea că *a* şi *a′* sînt *opuse* unul altuia. Pentru o operaţie oarecare notată o şi avînd un element neutru v, două elemente care sînt astfel încît

aoa′=a′oa = v

se numesc simetrice. (Cuvîntul „opuse“ este rezervat pentru operaţia notată +.)

CONSECINŢĂ (care justifică alegerea acestor axiome).

***Fiecărei perechi* (a, *b) din Z îi corespunde un număr x astfel încît a = b + x.* într-adevăr, conform axiomelor [A] şi [S_2], numărul *x = a b′* satisface această condiţie.**

în plus, această soluţie este unică, fiindcă

***[b + x = a* şi *b + y* = a] => [6 + *x = b* + y] *[x* = y].**

Scriem *x =a —b;* operaţia se numeşte *scădere* şi *x* este *diferenţa* între *a* şi *b.*

TEOREMĂ

[x = b —* a] =s> [a — *b = x′]

căci

[6 = *a* -f- *x* şi *a = b* -f- y] =s- [a; + y =0].

Aşadar, în Z există o operaţie asociativă, care are un element neutru, şi fiecare element are un simetric: spunem despre o astfel de mulţime că are o *structură de grup.* Deoarece operaţia este şi comutativă, acesta este un *grup comutativ,* numit şi *grup abelian,* după numele ilustrului matematician norvegian ABEL (1802 — 1829). Deoarece operaţia este numită adunare şi se notează cu semul +, grupul este un *grup aditiv.* (Cu noţiunea de grup ne vom întîlni frecvent, de-a lungul acestei lucrări.)

***b)* Axiome referitoare la o a doua operaţie numită înmulţire**

1. Va trebui să modificăm puţin axiomele care se refereau la întregii naturali:

Axiomele [A]. **Ele se păstrează, cu excepţia lui [A_2] care ar fi incompatibilă cu distributivitatea; o înlocuim cu**

[A_2"] *a=f=Q : [ab = ab'] [b* = 6'] *b =/=* 0 : *[ab*

--- a'b]* =s> [a *= a'].

Aşadar: simplificare cu un element diferit de zero.

Axiomele [M]

[Af_x] se păstrează: *distributivitate în raport cu adunarea.* [Af_2] este înlocuită cu [Af_2]: *există un element neutru pentru înmulţire.* îl vom nota [X. Aşadar

Va g Z, 3p, *Z* : ap. = [xa = *a.*

2. Teoreme referitoare la înmulţire. TEOREMA 1. *Produsul oricărui element cu zero este zero.*

într-adevăr, prin definiţie, *a* +0 = *a.*

Deci, conform lui [A_X]:

a(a +0) = ***aa***

şi, conform lui [M_x]:

aa -f- **a0 = *aa;***

aşadar

***aa* + a0 — *aa* +0**

de unde, prin simplificare, a0 =0. Tot astfel, 0a =0.

TEOREMA 2. *Dacă un produs de doi factori este egal cu zero, cel puţin unul din factori este egal cu zero.*

într-adevăr,

***[ab* =0 şi *a =/=* 0] => *[ab* = a0 şi *a* 0] =s»**

=> [6 =0] (conform lui (A_2"J).

TEOREMA 3. *Comparaţie între ab, ab', a'b* şi *a'b'.*

$$[b + b' = 0] \qquad [a(6 + b)' = a0 = 0],$$

deci $ab + ab' = 0$.

Prin urmare $(ab)' — ab'$. Tot astfel

$$(ab)' = a'b, \ (ab')' = a'b' —-ab.$$

In final, produsele sînt egale două cîte două, şi opuse două cîte două:

$$ab = a'b', \ a'b = ab' = (ab)'.$$

TEOREMA 4. *Distributioilatea înmulţirii în raport cu scăderea.* $c(a — b) = c(a + 6') = ca$ -f- $cb' — ca + (cb)' = ca — cb.$

CONSECINŢĂ. *Distributioitatea produsului în raport cu o succesiune oarecare de adunări şi de scăderi.*

Mulţimea Z este acum înzestrată cu o structură de grup faţă de adunare, şi cu o altă operaţie care este distributivă în raport cu prima: exprimăm toate acestea spunînd că Z este înzestrată cu o *structură de inel.* Deoarece înmulţirea este comutativă, spunem că inelul este *comutativ.* (In matematică se studiază şi inele mai generale, renunţînd de exemplu, la axioma simplificării [Aâ], sau la comutativitatea produsului. Vom studia, ceva mai tîrziu, un alt inel: inelul polinoamelor [Cartea a II-aJ.)

Să remarcăm că, în mulţimea Z, înmulţirea nu induce o structură de grup, fiindcă nu se presupune că orice element arc un simetric pentru înmulţire (el s-ar numi un *invers).*

c) **Axioma trichotomiei**

Mulţimea Z nu este încă complet caracterizată; trebuie să adăugăm axioma următoare:

1. Axioma [P]. *Elementele mulţimii se repartizează în trei clase:*

1) O clasă care nu cuprinde decît numărul 0.

2) O clasă închisă pentru adunare şi pentru înmulţire. Dacă P este această submulţime, definiţia ei este aşadar

Va, Vi : [a £ P şi i e P] [a + ***b*** **G P şi *ab* G P].**

3) O clasă care cuprinde toate elementele opuse celor din P. Vom numi *P'* această submulţime.

Să numim *numere pozitive* elementele din *P* şi *numere negative* pe cele din *P';* despre elementul zero vom spune că este *nul.* Axioma se enunţă astfel:

[P]: ***Orice element din Z este nul, pozitiv sau negativ,* cazurile acestea fiind disjuncte. *Două elemente opuse nenule sînt unul pozitiv şi celalalt negativ. Suma şi produsul a două elemente pozitive sînt pozitive.***

CONSECINŢE. (Dacă atribuim un *semn* pentru a caracteriza numerele pozitive şi un altul pentru a caracteriza numerele negative, această consecinţă se numeşte *regula semnelor*; vom alege ceva mai tîrziu aceste semne):

După teorema 3 a înmulţirii, *produsul a două numere negative este pozitiv.* Mai general, un produs care nu conţine nici un factor nul este pozitiv dacă numărul de factori negativi este par, şi este negativ dacă numărul acesta este impar.

în particular, oricare ar fi *a* nenul, *aa* este pozitiv.

Elementul neutru* (i verifică = p., şi este, deci, *pozitiv.

2. Teorema ordinei. Să introducem relaţia notată < şi definită prin

***a < b <==> — a* este pozitiv]**

Este oare aceasta o relaţie de ordine?

Ea nu este reflexivă. Ea nu este nici simetrică, căci

b = a* -ţ- *d <=> a = b d';

dacă *d* este pozitiv, *d'* este, aşadar, negativ. Să verificăm acum tranzitivitatea:

[a < 6] [3d pozitiv =] I [c = a + +
[6 < c] <=> [3d' pozitiv : *c = b* -j-d'] J

or, *d* + d' este pozitiv; prin urmare

***[a < b* şi 6 < c] =s> [a < c].**

Aşadar, prin relaţia astfel introdusă, *mulţimea E este*

total ordonată.

CONSECINŢE

deoarece *a* — 0 = *a, 0 < a <=> a* pozitiv

deoarece 0 — *a = a', a* < 0 •*=*» *a* negativ.

Prin urmare (prin tranzitivitate), *orice număr negativ este mai mic decît orice număr pozitiv.*

3. Definiţia valorii absolute. Valoarea absolută |a|a unui număr *a* se defineşte prin

/ *a* | =0 <—* *a* = 0

|a| *=a *=> a* pozitiv

/ *a* / = *a'* <-*■ *a* negativ.

Prin urmare, | *a* | este pozitiv sau nul.

TEOREMA 1.

|afe| = |a| • | *b*|.

TEOREMA 2.

(I ® I + I & |)' a + &-C|ªi + I N

(rezultă din | *a* /' < *a* < / *a* / şi / *b* /' < *b* •< / *b* /).

***d)* Ne rămîne să caracterizăm pe *Z* ca mulţime de întregi pozitivi, negativi şi nul şi, pentru aceasta, trebuie să introducem o axiomă de bine ordonare în submulţimea *P* a numerelor pozitive.**

[BO]': *Orice submullime a lui P care nu este vidă are un element care este mai mic decît toate celelalte elemente ale submulţimii.*

Şi, în particular,

[BOj]': *Submulţimea P are ea însăşi un element minim.*

TEOREMĂ. *Elementul minim al lui P este elementul neutru (z al înmulţirii.*

Intr-adevăr, fie *p* acest element minim; între elementele pozitive *p* şi [A există relaţia de ordine *p* p. Prin urmare

***P — PP = py — PP = p(y — p)* > 0-**

Or, inegalitatea este imposibilă, fiindcă altfel numărul pozitiv *pp* ar fi mai mic decît *p,* ceea ce ar contrazice definiţia lui *p;* prin urmare numai egalitatea se poate realiza şi *p* = p. De aceea, numerele pozitive sînt p, p +p, p + p 4~p etc.

CONCLUZIE. O mulţime *Z* care îndeplineşte aceste condiţii este o mulţime a cărei submulţime *P* este izomorfă cu mulţimea întregilor naturali V în raport cu adunarea, cu înmulţirea, cu axiomele de ordine, cu alte cuvinte—în raport cu toate proprietăţile care caracterizează mulţimea *N. Prin urmare, toate mulţimile Z vor fi izomorfe cu cea pe care o vom construi acum:* Drept submulţime *P,* luăm mulţimea întregilor naturali. Fiecărui număr întreg natural *a* îi asociem un element notat cu un simbol nou, *a'* [de pildă, lui 4 îi asociem simbolul (4)']; în plus, introducem simbolul 0 şi constrîngem aceste simboluri să verifice axiomele enunţate mai sus.

Elementul neutru al înmulţirii este cel mai mic întreg natural; aşadar, este 1. Valorile absolute sînt întregii naturali.

Notaţia adoptată în realitate pentru asociatul *a'* al numărului natural este *—a,* scris cu ajutorul semnului scăderii. Aceasta nu poate genera nici o confuzie fiindcă, oricare ar fi elementul *m, m -j-a' =m —a.* Convenţia revine deci la a scrie

$$m + (-a) = m - a.$$

Se adoptă această convenţie chiar şi atunci cînd *a* este negativ: atunci *a' = —a* este pozitiv.

In cazul unei mulţimi izomorfe cu cea pe care tocmai am constituit-o, numerele pozitive — în corespondenţă biunivocă cu întregii naturali — vor fi prevăzute cu un semn + ; şi se adoptă convenţia *m -)-(-)-«) = m* -Ţ *a.*

***Mulţimea întregilor relativi Z* se scrie deci:**

$$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \ldots$$

REMARCĂ IMPORTANTĂ. Extensia prin simetrizare de mai sus, precum şi convenţia referitoare la semnele + şi —, se va păstra şi cînd vom face simetrizarea

pornind de la mulţimi mai cuprinzătoare decît cea a întregilor naturali (fracţii, numere iraţionale), dar vom abandona axioma de bine ordonare şi consecinţele ei.

§ 3. FRACŢII ŞI NUMERE RAŢIONALE.

Ştim că numerele întregi, chiar şi cele relative, sînt insuficiente pentru nevoile măsurării mărimilor: practica introduce fracţii, de pildă 3/4, şi consideră că 3/4 şi 6/8 sînt echivalente din punct de vedere al acestor măsurări. Ce fel sînt numerele astfel introduse? Ne vom ocupa acum de definirea lor prin proprietăţile fundamentale binecunoscute, impuse de însăşi utilizarea acestor numere.

CUM SE PUNE PROBLEMA DIN PUNCT DE VEDERE MATEMATIC.

Definiţia întregilor naturali nu permite rezolvarea ecuaţiei *b + d = a* decît în cazul în care *a* este mai mare decît 6; în caz contrar, ecuaţia nu este satisfăcută de nici unul din numerele mulţimii. Am văzut că extensia prin care am creat mulţimea întregilor pozitivi, negativi sau nul a ridicat restricţia şi a asigurat existenţa diferenţei *d* oricare ar fi numerele *a* şi *b* ale mulţimii. A fost suficient, pentru aceasta, să introducem numărul zero şi să asociem fiecărui element *a* simetricul lui pentru adunare, adică *opusul* lui.

În ceea ce priveşte înmulţirea, ştim că ecuaţia *bq =a,* cînd *b* şi *a* sînt date în mulţimea întregilor (naturali sau relativi) nu are, în general, soluţie. Numărul *q* nu există decît pentru anumite perechi (a , *b).* Am exprimat acest fapt spunînd că mulţimea nu are o structură de grup pentru înmulţire.

Pentru a face posibilă totdeauna operaţia inversă înmulţirii, putem proceda ca la adunare: introducem un element neutru pentru înmulţire, şi fiecărui element îi asociem un simetric care, în cazul de faţă, va fi numit *inversul* numărului respectiv. Elementul neutru se numeşte „element unitate“ şi se notează *e.* Este elementul 1, în cazul întregilor. Inversul lui *b* (de

exemplu) va fi notat p. Aşadar *bfi = e* şi soluţia ecuaţiei *bq = a* este *q* = Pa.

Introducem în felul acesta *cîtimile'.* jumătatea, treimea, pătrimea, cum au procedat încă şi vechii egipteni.

Dar noi vrem o mulţime închisă pentru adunare. Or, suma a două cîtimi nu este o cîtime-Extensia propusă mai sus nu este suficient de cuprinzătoare. De aceea vom introduce o mulţime mai bogată, mai largă: mulţimea *fracţiilor.* Vom vedea însă că ea este prea cuprinzătoare (!), şi, în cele din urmă, vom fi conduşi Ia mulţimea mai puţin cuprinzătoare care corespunde scopului urmărit: mulţimea *numerelor raţionale.*

I. Fracţiile

Numim *fracţie orice pereche de întregi a, b* de semne oarecare (pentru început ne-am putea limita la întregi naturali), *cu condiţia că b nu este nul.* Scriem fracţia sub formă *a/b,* un simbol provizoriu pe care-1 supunem axiomelor următoare:

a) **Relaţia de echivalenţă. în extensia pe care dorim s-o realizăm, *bq = a* trebuie să atragă după sine *mbq = ma;* prin urmare, dacă *q* este notat cu *alb,* el va fi notat şi cu *ma/mb,* şi dacă *q* este notat cu *a/b* şi *a'/b',* el trebuie să poată fi notat şi cu *ab'Ibb'* şi *a'b/bb'.***

Toate acestea justifică intuitiv următoarea convenţie:

In mulţimea considerată există o relaţie de echivalenţă

[E] ***[a/b = a'lb'] [ab' = a'b].***

Să verificăm că aceasta este realmente o relaţie de echivalenţă: reflexivitatea şi simetria sînt evidente; să demonstrăm tranzitivitatea .

[a/b = a'/b'] <=> [ab' = a' b]]
[a'/b' = a"/b"] [a'b" = a"b]]

I ***|aa b b = a a bb .***

Deoarece, prin definiţie, *b, b', b"* nu sînt nule, de aici deducem *ab" = ba"*, chiar şi atunci cînd *a'* = 0, fiindcă

atunci *a = a"* =0.

CONSECINŢĂ:

a/b = ma/mb.

APLICAŢIE. Aducerea la acelaşi numitor (regula cunoscută).

b) **Adunarea. [Vrem să adoptăm o regulă care să conducă la 6(î + ?') = ª + «'■]**

1. *Definiţia adunării a două fracţii:*

fracţii cu acelaşi numitor: *a/b + a'/b* = (a + *a")/b;*

fracţii cu numitori oarecare: după aducerea la acelaşi numitor şi înlocuirea unei fracţii cu o fracţie echivalentă,

a/b + a'/b' = [ab' + ba^/bb'.

ENUNŢ. Orice fracţie echivalentă cu fracţia care se obţine — după aducerea la acelaşi numitor —adunînd numărătorii şi păstrînd numitorul comun se numeşte *suma* fracţiilor date.

Aşadar, în felul acesta *suma este definită pînă la o echivalenţă.*

2. *Operaţia introdusă verifică proprietăţile* [A], ca o consecinţă a proprietăţilor întregilor care figurează la numărători după aducerea la acelaşi numitor. Ea verifică [S*] dar, în cazul de faţă, elemente neutre sînt toate fracţiile, echivalente între ele,, care au numărătorul nul şi numitorul nenul, altfel oarecare.. Fracţiile 0/p se numesc *fracţii nule.*

Operaţia verifică [S_2], dar fracţiile opuse lui *a/b* sînt (—a)/6, °/(—Ş* toate fracţiile echivalente lor. Deducem de aici regula de scădere

(a/b) - (a'/b') = (a/b) + [(-«')/&'] = W - ba')lbb'.

c) **înmulţirea. [Vrem să adoptăm o regulă care să conducă la *(bb')qq' = aa'.]***

1. DEFINIŢIE, *(a/b) (a'/b') = (aa')l(bb').*

Orice fracţie echivalentă cu fracţia care are ca termeni produsele termenilor fracţiilor date se numeşte

produsul fracţiilor.

2. Proprietăţile [A] şi [Af] se verifică făcînd aducerea la acelaşi numitor; natural, [A_2] are forma [$Â_2$"]: simplificarea nu este permisă decît cu un element nenul.

[M_2] are forma [Af_2]: există un element neutru pentru înmulţire, care, aici, nu este definit decît pînă la o echivalenţă: *pip,* oricare ar fi *p* nenul.

3. Elementul neutru ca factor al unui produs:

1) (a/6) (0/ʔ)=0/p;

2) L^a *=f=* ^{0} Şi *("Ib'Kplq')* = 0/n] [/> =0].

ENUNŢURI. Produsul oricărei fracţii cu o fracţie nulă este o fracţie nulă.

Dacă produsul a două fracţii este o fracţie nulă, cel puţin una din fracţii este o fracţie nulă.

***d)* Teorema care justifică introducerea fracţiilor:**

***în mulţimea fracţiilor, împărţirea —operaţie inversă înmulţirii — este posibilă, cu condiţia ca dioizorul să nu fie o fracţie nulă.* într-adevăr, orice fracţie nenulă are o fracţie inversă definită pînă la o echivalenţă: dacă *a =f=* 0, avem *(ajb)(bla) = n/n* (elementul neutru al înmulţirii); prin urmare**

[a'VrO şi *(a'lb'^u/v) = a/b] [u/v = (a/b^b'*/a')].

II. Numerele raţionale

Pentru a realiza o unicitate autentică în operaţiile de mai sus, este suficient să considerăm nu mulţimea fracţiilor ca atare, ci *mulţimea claselor de echivalenţă.* O fracţie nu va mai interveni decît ca reprezentantă a clasei din care face parte. Invers, caracterizăm fiecare clasă prin una din fracţiile care îi aparţin. *Fiecare clasă se numeşte un* NUMĂR RAŢIONAL.

Clasa fracţiilor nule este *numărul raţional nul, o,* reprezentat de pildă de 6/1.

Clasa fracţiilor neutre pentru înmulţire va fi numărul raţional neutru pentru înmulţire, p, reprezentat de

pildă de 1/1.

Dacă a şi p sînt numere raţionale, a = Ş va însemna că a şi P fac paite din aceeaşi clasă de fracţii echivalente.

Odată stabilite toate acestea, toate proprietăţile enunţate pentru fracţii vor fi adevărate pentru numerele raţionale, de data aceasta — cu unicitate pentru rezultatele operaţiilor. Este tocmai ceea ce exprimă concluzia:

Mulţimea numerelor raţionale formează un grup comutativ In raport cu adunarea-, **înmulţirea, distributivă în raport cu adunarea, îi conferă o *structură de inel.* In plus, orice element — cu excepţia elementului nul o> — are un *element invers* (simetric pentru înmulţire). Această ultimă condiţie transformă structura de inel în *structură de corp.***

Notă: Iată definiţiile generale ale acestor structuri:

DEFINIŢII. O mulţime este un *grup* dacă este înzestrată cu o operaţie internă asociativă, care are un element neutru şi este astfel îneît orice element are un simetric.

0 mulţime este un *inel* dacă este înzestrată cu două operaţii interne, dintre care una îi conferă o structură de grup, iar a doua este asociativă şi distributivă faţă de prima.

Un inel este un *corp* dacă operaţia a doua înzestrează mulţimea cu o nouă structură de grup, cînd se extrage din această mulţime elementul neutru al primei operaţii.

Prima operaţie a unui inel, sau a unui corp, se notează cu semnul adunării; elementul ei neutru este zero. Operaţia a doua se notează cu semnul înmulţirii; ea poate să nu fie comutativă, dar atunci trebuie asigurată distributivitatea, la dreapta şi la stînga, faţă de adunare.

REMARCĂ. Noi n-am utilizat toate proprietăţile întregilor, în particular — axiomele de ordine; aceasta înseamnă că am fi putut opera asupra perechilor de elemente ale unei mulţimi mai generale decît cea a întregilor. Am fi avut atunci o structură de corp pe o mulţime alta decît inelul numerelor raţionale. Şi tocmai

multivalenţa extensiei studiate justifică folosirea acestor termeni generali. Corpurile definite aşa cum am făcut-o noi, introducînd o relaţie de echivalenţă între elemente, se numesc *corpuri de cituri.* Vom întîlni un alt exemplu de asemenea corp cînd vom trece de la inelul polinoamelor la corpul fracţiilor raţionale ai căror termeni sînt polinoame.

ffl. în raport cu adunarea şi înmulţirea, mulţimea Z a întregilor este izomorfă cu o submulţime a mulţimii *Q* a numerelor raţionale.

1) într-adevăr, să comparăm numărul raţional de reprezentant a/1 cu întregul *a.* Corespondenţa este biunivocă şi asociază suma şi produsul elementelor. Prin urmare luînd întregul *a* ca reprezentant al simbolului a/1, obţinem un model al lui *Q.* Modelul acesta este efectiv adoptat în practică, aşa că vom scrie 0 pentru co, 1 pentru p, *a* pentru clasa fracţiilor echivalente cu a/1, adică 2a/2, 3a/3, ...

Dar atunci

$$(6/1)\ (a/b) = a/1$$

se scrie

$$b\ [a/b] = a$$

dacă notăm cu [a/b] numărul raţional al cărui reprezentant este *a/b.* Prin urmare, *numărul raţional de reprezentant ajb este citul lui a împărţit la b.* Scriem y şi convenim să folosim această

notaţie — pentru a reprezenta cîtul lui *a* prin *b,* numărul ra- *b*

ţional de reprezentant a/b, precum şi fracţia *a/b* ea însăşi. Comitem prin aceasta un abuz de notaţie, fiindcă confundăm între ele mulţimi de structuri izomorfe.

2) Pentru ca izomorfismul între mulţimea întregilor şi mulţimea numerelor raţionale — să fie extins la relaţiile de ordine, trebuie să definim o asemenea relaţie şi în

mulţimea a doua:

$$\frac{a}{1} < \frac{b}{1} \text{ <^=s> } a$$

O vom extinde acum la întreaga mulţime anumerelorraţionale:

Relaţia de ordine totală în mulţimea *Q* a numerelor raţionale

a) Semnul unui număr raţional. **Dacă două fracţii *a/b* şi *a'/b'* sînt echivalente, egalitatea *ab' — ba'* care exprimă această echivalenţă demonstrează că a' şi *b'* sînt de acelaşi semn sau de semne diferite, după cum *a* şi *b* sînt sau nu de acelaşi semn. In plus, submulţimea formată din numerele raţionale p ale căror reprezentanţi sînt fracţii *a/b* cu termeni de acelaşi semn este închisă pentru adunare şi pentru înmulţire. Opusele numerelor p sînt formate din fracţiile *— alb=a/—b* cu termenii de semne contrare. Toate acestea justifică definiţia:**

Spunem despre un număr raţional că este pozitiv dacă fracţiile care iiaparţinau termenii de acelaşi semn: **fracţiile însele se numesc, în acest caz, fracţii pozitive. Fracţiile, precum şi numărul raţional pe care-1 reprezintă, se numesc *negative* dacă cei doi termeni ai fracţiilor sînt de semne contrare.**

b) Definiţia relaţiei de ordine, **notată < :**

***[a/b* < c/d] <=> [(c/d) — *(a/b)* pozitiv].**

Iar pentru numere raţionale,

[p < <i] <=> [ff — p pozitiv].

Se verifică imediat că aceasta este, într-adevăr, o relaţie de ordine: nereflexivă, nesimetrică, tranzitivă, aducînd fracţiile la un acelaşi numitor pozitiv; după aceea este suficient să se compare între ei numărătorii.

In plus, se poate verifica în acelaşi fel că

0 < p «#—> p pozitiv

p < 0 p negativ.

Proprietăţile mulţimii *Q*

Teorema 1. *Mulţimea numerelor raţionale pozitive este arhi- medeană,* adică

$$\left.\begin{array}{l}\text{Vp, Vcr, p e } Q, a\ GQ \\ 0 < p < <T\end{array}\right\} \longrightarrow [\exists n \in N : \rho n >$$

Existenţa acestui întreg pozitiv *n* rezultă, după aducerea la acelaşi numitor pozitiv, din proprietatea analoagă a mulţimii întregilor naturali.

Conchidem, ca în cazul numerelor naturale, că *firul multiplilor* p, 2p, 3p *ai unui număr raţional pozitiv nu este majorat.*

Teorema 2. *între oricare două numere raţionale există numere raţionale* (această teoremă este contrară celei de bine ordonare a întregilor).

1. *între* 0 şi *un număr raţional pozitiv oarecare r există numere raţionale.* într-adevăr, fie *ajb* o fracţie care aparţine lui *r.* Prin ipoteză, *a* şi *b* sînt de acelaşi semn: îi putem presupune pozitivi. Scriem

a/b = (najlţnb'j.

Dacă r' este clasa fracţiilor echivalente cu *a'/(nb),* inegalitatea 0 < *r'* < *r* este asigurată de inegalitatea *a* < *a'* < *na-,* or, asemenea valori *a'* există dacă *n* este ales mai mare decît 1.

2. Din punctul 1. se deduce teorema generală, fiindcă < < *r'* < r_2 este echivalentă cu

$$0 < r' - rj < r_2 - rj.$$

Vom lua deci *r'* = r +s, unde s este cuprins între 0 şi $r_2 - r_v$

ALT ENUNŢ. *Fiind dat un număr raţional r, oricare ar fi numărul pozitiv £ arbitrar ales, există numere raţionale cuprinse tntre r — £ ?i r +* E

Vr, *Vs* > 0, 3p : *r — z < p < r +* E.

Exprimăm această proprietate spunînd că mulţimea *Q* a numerelor raţionale este *peste tot densă.*

Rezultă de aici că numerele raţionale sînt suficiente pentru a exprima orice experienţă de măsurare, şi aceasta oricare ar fi precizia dorită, dinainte aleasă.

REMARCĂ. Mulţmea *Q* a numerelor raţionale este mai bogată decît mulţimea Z a numerelor întregi. Dar nu putem spune că în *Q* există mai multe elemente decît

înZ: în ambele cazuri există o infinitate de elemente. Dacă vrem să exprimăm precis comparaţia între două infinităţi, sîntem conduşi la o noţiune care o înlocuieşte pe cea de număr cardinal al unei colecţii; este noţiunea de *putere* a unei mulţimi. Vom spune cîteva cuvinte despre ea în cap.3 al Cărţii a Il-a.

§ 4. NOŢIUNI DESPRE NUMERELE REALE

Am văzut, mai înainte, că mulţimea numerelor raţionale este suficientă pentru nevoile practicii şi ale ştiinţei experimentale. Studiul geometriei teoretice a condus însă Şcoala pitagoreică la proprietatea pe care o enunţăm acum: dacă latura unui pătrat este luată drept unitate, diagonala lui este măsurată de un număr *x* care este astfel încît $x^2 = 2$. Or, nici un număr raţional nu satisface această ecuaţie. într-adevăr, vom justifica —în cadrul aritmeticii — raţionamentul următor: dacă ar exista o fracţie — care verifică

$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, **am putea presupune că fracţia aceea este ireductibilă.**

Or, egalitatea se scrie $p^2 = 2g^2$; prin urmare *p* este par: *p =2p',* iar *q* este impar. Dar egalitatea devine atunci $4p'^2 = 2g^2$, adică $2p'^2 = q^2$, care cere ca *q* să fie par, ceea ce contrazice ipoteza.

După mărturia lui Platon (sec. al V-lea î.e.n.), aceeaşi concluzie de imposibilitate fusese formulată şi pentru $x^2 =3$, $x^2 =5$, ... pînă la $x^2 =17$, evident —cu excepţia valorilor $x^2 = 4$, 9 sau 16.

PUNEREA PROBLEMEI DIN PUNCT DE VEDERE MATEMATIC

Aşa cum am făcut o extensie a mulţimii 7V a întregilor naturali la mulţimea Z, pentru ca ecuaţia *b* + a: =a să aibă totdeauna o soluţie, şi apoi extensia la mulţimea *Q* a numerelor raţionale în aşa fel ca ecuaţia *bq = a* să aibă totdeauna o soluţie (cu condiţia că *b* nu este nul), tot astfel trebuie să facem o extensie ă lui *Q* pentru ca ecuaţia $x^2 =a$ să aibă totdeauna o soluţie, cel puţin cînd *a* este pozitiv, mulţimile precedente fiind, de fiecare dată, izomorfe cu o submulţime a mulţimii create.

Dar există multe alte ecuaţii care nu au soluţie în mulţimea numerelor raţionale; extensia pe care ne-o propunem s-o facem poate fi mai mult sau mai puţin largă. Pentru început ne limităm la rădăcinile pătrate-

I. Introducerea rădăcinilor pătrate

Ce ne furnizează mulţimea *Q* a numerelor raţionale pentru studiul ecuaţiei x^2 = a? Să ne limităm la cazul *a = întreg pozitiv.*

Dacă ecuaţia este imposibilă în mulţimea *Q* a raţionalelor, această mulţime se împarte în două clase: clasa *Q′* a numerelor *q′* prea mici: $q'^2 < a$, şi clasa *Q″ a* numerelor *q′* prea mari: g"^{2} > *a.*

a) Mulţimea. Q' nu are un element maxim. **Cu alte cuvinte, oricare ar fi *q'* G *Q',* există totdeauna alt element din *Q'* mai mare decît elementul ales.**

într-adevăr, fie *q' =* —. Prin ipoteză, I— i < *a.*
P

Prin urmare, $ap^2 - m^2 = d$ este un întreg pozitiv, *d* 1.

Să considerăm atunci numărul raţional ” —> evident mai

mare decît *q'.* Vom verifica imediat că luînd pe *k* suficient de mare, acest număr rămîne în clasa *Q',* cu alte cuvinte că avem

$$ak^2p^2 > (km - l)^2 \text{ , adică } k^2d > 2km + 1.$$

Este suficient să luăm, de pildă, *k = 2dm,* fiindcă inegalitatea dorită se scrie atunci

$$4dm^2(d^2 - 1) > 1,$$

care este îndeplinită dacă *d* > 1.

Dacă *d = 1,* vom lua *k > 2m.*

h)* Tot astfel, *mulţimea Q",* caic este minorată de oricare număr *q', nu are un element minim.

Dacă *q" = —>* vom analiza de data aceasta numărul —

P *P

din clasa *Q".* Trebuie ca, plecînd de la

$$m^2 - ap^2 = d\ 1,$$

să existe inegalitatea *(km* — l)^2 > *ak²p²,* prin urmare inegalitatea *k²d > 2km* — 1.
Vom lua după aceea *k = 2dm.*

c) Putem face să corespundă unui număr q' dinQ'un număr q" din Q" în aşa fel încît q" — q' să fie mai mic decît orice număr raţional pozitiv e, ***arbitrar ales.***

V_e > 0, e G *Q, 3q'* G *Q'* şi *3q"* G <?"

într-adevăr, putem totdeauna considera un număr *întreg pozitiv p* astfel încît

$$0 < \frac{}{P} < e$$

(dacă s = a/p, este suficient să luăm *p* > p/a). Este suficient atunci să luăm *q' = m/p, q" = (m* + l)/p, unde *m* este întregul care verifică

$$\left(\frac{m}{p}\right)^2 < a < \left(\frac{m+1}{p}\right)^2$$

Or, acest număr *m* există realmente, căci şirul 1, 2^2, 3^3, ... n^2, ... al pătratelor întregilor nu este majorat; el depăşeşte orice întreg *k* (fiindcă conţine pe k^2), prin urmare, depăşeşte şi pe ap^2.

Exprimăm proprietatea *c)* prin propoziţia: putem găsi perechi *q", q'* astfel încît *q" —q' să tindă către zero* (v. cap.4).

Ne putem da seama acum de natura axiomei creatoare a numărului nou care trebuie introdus între *q'* şi *q" •.*

II. Axioma completitudinii

Orice submulţime majorată are un cel mai mic majorant.

a) **Mulţimea care verifică proprietăţile enunţate ale mulţimii *Q* a numerelor raţionale şi, în plus, axioma [T], se numeşte *mulţimea numerelor reale* şi se notează cu *R.* în realitate, axioma [rj cuprinde două axiome, pe care le putem enunţa separat:**

[I\] *Orice submulţime majorată a lui Q are un cel mai mic majorant care aparţine lui R şi, în mod excepţional, lui Q.*

[Tj] *Orice submulţime majorată a lui R are un cel mai mic majorant care aparţine lui R* (fără să fie nevoie, aici, să distingem submulţimea *Q* a lui *R}.* Acest majorant se numeşte *marginea superioară* a submulţimii.

Vom admite compatibilitatea axiomelor **care definesc numerele reale. Mulţimea acestor numere este deci înzestrată cu operaţii de adunare şi de înmulţire, cu proprietăţile enunţate pentru *Q,* şi ea este total ordonată: fiecare număr real este sau pozitiv, sau negativ, sau zero.**

b) **în aceste condiţii, să demonstrăm existenţa unui număr real *r* care satisface ecuaţia .r^2 = *a (a* = întreg**

pozitiv, care nu este pătratul unui număr ralional).

Să reluăm partiţia lui *Q* în două clase *Q'* şi *Q".* Deoarece *Q'* este majorată, există un cel mai mic majorant în *R,* fie el *r.* (Ştim că *r* nu aparţine lui *Q.)* Dar orice număr *q"* G *Q"* este majorant al lui *Q',* prin urmare este mai mare decît *r.* Altfel spus, *r* este un jminorant al lui *Q".* Aşadar

$$v_g' \text{ e } Q' \text{ şi } V_?" \in Q", q' < r < q".$$

Mai există vreun alt număr s G *R* care verifică *q' < s < q"?* Dacă ar exista, am deduce

V/ e *Q'* Şi $v_?$" e <?" ■ 0 < |s - r I < *q"* - *q'* prin urmare, oricare ar fi e pozitiv, numerele astfel determinate ar verifica

$$0 < \quad - r| < E,$$

ceea ce implică *s = r.*

Aşadar, există în *R* un număr r, şi numai unul singur, care verifică

$$V_?' \text{ e } Q' \text{ Şi 6 } Q" : q'^2 < r^2 < q"^2.$$

Or, avem şi $q'^2 < a < q"^2$, prin urmare

$$0 \ |a - r^2| < q"^2 - q'^2 < 3E<7", Vs,$$

ceea ce implică $r^2 = a$. Aşadar *r* este soluţia ecuaţiei $x^2 =$ a; şi este unica soluţie pozitivă. Scriem $r = \sqrt{a}$. Unica soluţie negativă este *—]/a.a* se citeşte „rădăcina pătrată a lui *a".*

***c)* Am demonstrat, admiţînd compatibilitatea axiomelor, exis" tenţa rădăcinii pătrate pozitive a unui întreg pozitiv; din ea deducem existenţa rădăcinii pătrate a unui număr raţional pozitiv ; am putea demonstra, prin metode analoage, existenţa rădăcinii pătrate a oricărui număr real pozitiv, dar şi cea a rădăcinilor cubice, a celor de ordinul 4, de ordinul *n.* în afară de aceasta, noi am mai introdus automat încă multe alte numere: fie, de pildă, ecuaţia**

$$/'(x) = x^1 \ x — 3=0$$

pe care ne-o propunem s-o studiem pentru 0 < *x* < 2.

Putem verifica că Tj < x_2 implică *f(x^) < f(x_2)*- în mulţimea numerelor reale cuprinse între 0 şi 2, să distingem mulţimea *X'* a numerelor *x'* astfel încît *f(x')* < 0 şi mulţimea *X"* a numerelor *x"* care verifică *f(x")* 0; vom vedea (la p.107) că sîntem con duşi să afirmăm existenţa unui număr real *r* astfel încît

$$f(r) = 0.$$

Un asemenea număr, rădăcină a ecuaţiei obţinute egalînd cui zero un polinom cu coeficienţi întregi, se numeşte *număr algebric.* Mulţimea numerelor algebrice conţine aşadar mulţimea radicalilor (iădăcinilor) de orice indice întreg natural.

Dar aceasta încă nu este totul. Studiul teoretic al cercului conduce la introducerea numărului *iz* printre numerele reale (Cartea I, cap.5). Or, matematicianul LINDEMANN, completînd rezultatele- obţinute de LAMBERT (1761) şi HERMITE (1872), a demonstrat în 1882 că ĸ nu este un număr algebric. Asemenea numere se numesc *numere transcenden te* ■

Vedem deci că axioma [T] introduce în vrac numere foarte variate,, necesare pentru ca mulţimea să fie *completă.* Cu toate acestea, în matematică sînt introduse şi alte numere, de pildă pentru a atribui- soluţii ecuaţiei $a^2 + 1 = 0$. Pentru a le crea, va trebui să abandonăm anumite axiome, cum ar fi axioma de ordine totală (Cartea* a IlI-a, cap.6: Numere complexe).

III. Proprietăţi ale mulţimii *R* a numerelor reale

Am construit mulţimea 7? a numerelor reale plecînd de la mulţimea numerelor raţionale cu ajutorul axiomei creatoare |T] pe- care o enunţăm acum riguros:

[rj: AXIOMA COMPLETITUDINII. *Orice submulţime A a lui R' care este majorată are un cel mai mic majorant care se numeşte* marginea superioară *a lui A şi se notează* Sup *A.*

în mod analog, considerînd ordinea inversă, definim marginea inferioară, Inf A, a oricărei submulţimi minorate *A;* ea este cel mai mare minorant.

Teoreme

a) Mulţimea numerelor reale este arhimedeană. **Intr-adevăr, şirul r, 2r, 3r, ... , *nr,* ... al multiplilor lui r nu poate fi majorat, căci atunci ar avea un cel mai micmajorants, şi s—rar fi depăşit, aşadar, şi .s ar fi depăşit. (Raţionăm prin recurenţă asupra întregului natural n.)**

b) Teorema intervalelor cuprinse unul în altul.

DEFINIŢIE. Se numeşte *interval* (a, *b),* unde *a* şi *b* aparţin lui R_f mulţimea numerelor reale cuprinse între *a* şi *b.* Cu mai multă precizie, deosebim, dacă este nevoie:

***interval închis, [a,* 6], mulţimea numerelor *x* astfel îneît**

$$« x b,$$

***interval deschis,*]«, t[, mulţimea numerelor *x* astfel îneît**

$$a < x < b,$$

interval închis la stînga, deschis la dreapta, *[a, b*|, mulţimea numerelor *x* astfel îneît a i < &, şi, în mod analog, interval deschis la stînga şi închis la dreapta.

Notăm

[a, + oo[şi]a, + oo[sau, uneori [a, —> [şi] «, —>[mulţimile care verifică

$$a \; x \text{ şi } a < x.$$

în mod analog, folosim notaţiile

]— «] ?i]— *a[* sau j<—, o] şi j<—, «[

pentru

$$x \; a \text{ şi respectiv } x < a.$$

***Şirde intervale cuprinse unul în altul* este, prin definiţie, un şir de intervale («$_1$; *bj, («$_2$, b_2), ... , («„, b_n), ...* astfel îneît**

$$«1 < a_2 < \bullet\bullet\bullet < a_n < ... < b_n < ... < b_2 < b_r,$$

unele din aceste inegalităţi putînd deveni şi egalităţi, eu

condiţia însă să mai existe inegalităţi, oricît de mare ar fi *n.*

Teoremă. *Fiind dat un şir de intervale închise, cuprinse unul în altul, a căror lungime tinde către zero, există un număr real şi numai unul singur care este interior tuturor acestor intervale.*

Ipotezele sînt:

$$([«, b] \text{ D } [«!, \text{ D } [a_2, b_2] \text{ Z> } \ldots \text{ D } [a_n, b_n] \text{ Z> } \ldots$$
$$| \quad \text{Ve, } 3A' : n > N \; b_{tl} — a_n < s.$$

Şirul «1,02, ... , a_n, ... este nedescrescător şi este majorat de fiecare din numerele *b;* prin urmare el are o margine superioară care aparţine inlersecţiei tuturor intervalelor. Dar intersecţia nu poate conţine decît un singur număr (căci diferenţa a două numere ar putea fi minorată prin numere e).

Intersecţia intervalelor se reduce deci la numărul £. Vom spune că şirul este „o capcană[1]' care defineşte pe £.

EXEMPLE DE APLICAŢIE. Existenţa rădăcinilor pătrate, a rădăcinilor cubice etc.

IV. Mulţimea *Q* a numerelor raţionale, ca submulţime a mulţimii 7? a numerelor reale

***Fie r un număr real; oricare ar fi* e *pozitiv, există numere raţionale în intervalul (r* — e, *r* + e). Oricît de mic 1-ani alege pe £ pozitiv, aşadar oricît de mic am alege intervalul centrat în *r,* acest interval conţine numere raţionale.**

$$\text{Vr G } R, \text{ Vs} > 0, \; 3q \; Q : r \text{ -— } z < q < r \; z.$$

Această teoremă se demonstrează cu ajutorul mulţimilor *Q'* şi *Q"* de numere raţionale care sînt valori aproximative prin lipsă şi, respectiv, prin exces ale numărului *r,* aşa cum am procedat la definirea lui *|/2.*

Aşadar, orice interval, (oricît de mic l-am alege), conţine un număr raţional, şi chiar o infinitate de

numere raţionale. Exprimăm acest fapt spunînd că *mulţimea Q a numerelor raţionale este* peste tot densă *în raport cu mulţimea R a numerelor reale.*

Deşi studiul precedent este cu totul sumar şi incomplet, el va li suficient pentru nevoile noastre. Cînd vom spune „un număr", in algebră, în analiză, în geometrie, va fi vorba totdeauna de un număr real oarecare, cu condiţia să nu fie precizat altfel: număr absolut, număr întreg de un anumit semn, număr raţional sau nonraţional. Din contra, în *Aritmetică,* adică în *Teoria numerelor* vom studia succesiv, în capitole distincte, cîteva din proprietăţile elementelor fiecăreia din mulţimile *N.Z, Q, R;* este ceea ce constituie obiectul Cărţii a Il-a.

CAPITOLUL 3

SPAŢII VECTORIALE

Considerînd corpul numerelor reale drept o mulţime de operatori, vom construi acum un capitol de algebră care admite, printre alte modele geometrice posibile, şi geometria numită geometrie afină — cea care defineşte figuri cu ajutorul noţiunilor de paralelism şi de raport între segmente paralele, şi le studiază cu ajutorul translaţiilor şi al omotetiilor: pe scurt, geometria paralelogramului şi a teoremei lui Talc-s.

Axiomele alese pentiu a realiza aceste structuri generează o teorie abstractă, multivalentă. Din modelul geometric care ne este familiar vom reţine vocabularul, în particular cuvintele,,vector“ şi „paralelism", dar vom

apela la el şi ca sprijin al intuiţiei noastre

I. Vectori. Operaţii vectoriale

\om considera mulţimea *li* a numerelor reale şi o mulţime *V* de elemente *v, v', w, ...* pe care le vom numi *vectori.* Pentru a evita confuziile, vom plasa deasupra literelor care reprezintă vec- torii o săgeată şi vom scrie *v, v',* cel puţin la începutul studiului.

(In modelul geometrie, aceşti vectori abstracţi vor avea ca imagini aşa-numiţii *vectori liberi,* însă în cadrul altor modele, imaginile lor vor fi altele; de exemplu, *V* poate fi mulţimea poli- noamelor, sau mulţimea funcţiilor liniare- Un exemplu esenţial

este cel în care *V* este o mulţime (Ş de mărimi fizice, lungimi, arii, mase etc., în care definim G_x + G_2 şi *rG.* în acest capitol ne vom limita însă la imaginea geometrică.)

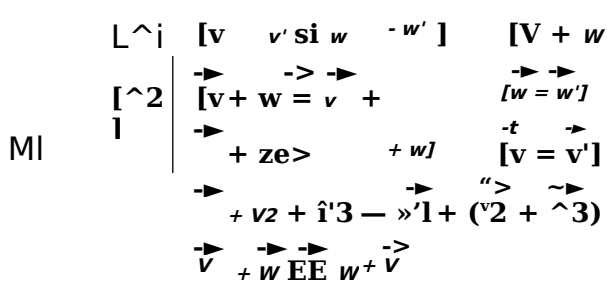
a) **Există O RELAŢIE DE ECHIVALENŢĂ, pe care o notăm~(mai tîrziu, cînd nu ne vom mai teme de confuzii, o vom nota cu =).**

v = w **se citeşte „vectorul *v* (este) echivalent cu *w“* sau „(este) egal vectorial cu“; mai tîrziu vom spune „(este) egal cu *w“.***

(în modelul geometric, această echivalenţă este *echipolenţa.)*

b) **ADUNAREA VECTORIALĂ. *V* este înzestrată cu o operaţie internă numită *adunare,* definită prin axiomele [A] care, în cazul de faţă, se scriu: oricare ar fi**

elementele *v, v', w,* ... ale mulţimii *i'.*



(în modelul geometric, cînd vectorii sînt reprczcnlaţî cu aceeaşi origine *A,* suma este reprezentată de diagonala paralelogramului construit pe *AB* şi *AC.* Axioma [A_xj afirmă că această diagonală rârnîne echipolentă cu ea însăşi dacă se schimbă poziţia punctului *A,* ceea ce în teoria intuitivă a paralelogramelor reiese imediat. *A_2]* şi [A_s] sînt atunci evidente, aşa eum este şi [A_4]. Vedem deci :ă axiomele traduc realmente proprietăţile pe care vroiam să le ntroducem în geometria noastră.)

CONSECINŢE. [C'j; *comutativitate şi asociativitate completă,* ca n capitolul I. (Am putea urmări demonstraţiile pe o figură.)

LXIOME DE SIMETRIZARE

în plus, afirmăm (ca în cap.2, § 2, pentru mulţimea *E):*

[51] *Există un element neutru pentru adunare,* notat 0:

$$\text{Vu, } v + 0 = 0 + v = v$$

(în geometrie intuitivă, este elementul *AB,* cînd punctele *A* şi *B* coincid.)

[52] *Oricărui element v diferit de* 0 *îi corespunde—v astfel încît*

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}.$$

Doi vectori semetrici în raport cu adunarea se numesc *opuşi.* Această relaţie este simetrică:

$$-(-\vec{v}) = \vec{v}, \text{ Vv G V.}$$

CONSECINŢĂ. *Diferenţa vectorială.* Ecuaţia vectorială

$$\vec{v} + \vec{x} = \vec{w}$$

admite soluţia

$$x = w + (-v),$$

ceea ce se scrie

$$x = w - v.$$

Soluţia este unică, pînă la o echivalenţă.

(în geometrie intuitivă, dacă *AB* este imaginea lui *v*, *BA* este imaginea lui $-\overrightarrow{v}$.)

Aşadar, prin această operaţie, mulţimea *V* este înzestrată cu o structură de grup abelian.

c)* ÎNMULŢIREA UNUI VECTOR CU UN NUMĂR REAL.** ***Aceasta este o operaţie externă care asociază fiecărei perechi formate din- tr-un număr real r şi un vector v, un vector w.

Numărul real se scrie primul: $\overrightarrow{w} = r\overrightarrow{v}$.

Presupunem că această operaţie verifică axiomele:

[^{m}i] [r = r' şi v = v'] =s> [rv = *r′v′*

[wj] Dacă *r* =/= 0, [rv = [v = v'] Simplificări

[m₂ *rv'*]

]

[r = r']

[mj] Dacă *v* 0, [rv = *r'v]*

[m

[mî] (r + *r')v = rv +*

[m₄ *r'v* Dislributivita

]

[7114] *r[v v') = rv +*

rv'

[mj] Vv G l : lv = *v* Elementele neutre şi

[7715] Vv GV : 0v

Justificare în geometrie intuitivă: dacă *AB* reprezintă vectorul *e,* atunci *AC* care se deduce din *AB* prin ometetia de raport *r* 'i

• ~~• «

de centru *A* reprezintă vectorul *w =rv;* proprietăţile corespondente axiomelor se recunosc imediat. [TW₄] **are ca imagine teorema lui Tales.**

CONSECINŢE. Asociativitatea pentru un număr oarecare de elemente *r, r', r"* etc. de numere reale se deduce din [TTI₃]. **Distri- butivitatea pentru un număr oarecare de numere reale şi pentru un număr oarecare de vectori se deduce din [m₄].**

REMARCĂ. Nu ntroducem o relaţie de ordine în *V.* Mai tîrziu (cap.5), vom introduce o altă relaţie de echivalenţă şi atunci, între clasele de echivalenţă (lungimea vectorilor) se va introduce o relaţie de ordine, dar în capitolul de faţă nu va fi vorba de aşa ceva.

NOTĂ DE TERMINOLOGIE. în cele de mai sus, noi am definit un spaţiu vectorial pe corpul *R* al numerelor reale. Mai general, putem defini *un spaţiu vectorial pe un corp K oarecare-,* acesta din urmă se numeşte *corp de scalari* asociat spaţiului vectorial, precum şi *corp de operatori.* Dacă mulţimea de operatori nu are decît

structură de *inel,* axiomele [TZI] **definesc un *modul.***

II. Spaţii vectoriale

Ştim că într-un plan, un vector este definit prin proiecţiile sale pe două axe; în spaţiu, trebuie date proiecţiile lui pe trei axe necoplanare. Vom prezenta acum toate acestea într-o formă axiomatică, pentru a defini un spaţiu vectorial abstract cu un număr oarecare de dimensiuni.

a) **Axiomele spaţiului vectorial cu *n* dimensiuni. Există un sistem de *n* vectori v_x, v_2, ..., v_n astfel încît nici o mulţime de *n* numere reale r_{15} r_2, ..., r_n, nu toate nule, nu poate asigura satisfacerea egalităţii vectoriale**

$$^{r}i^{v}i + {}^{r}2\hat{}2 + \bullet\bullet\bullet + {}^{r}A = 0.$$

Acest sistem de vectori constituie *o bază* a spaţiului vectorial: avem aşadar

[PJ AXIOMA BAZEI

-+ -► -> -+ 3(Vi, V_2, V_n) : V(r_n r_2, ..., r_n), + r_2v_2 + ... + r_nv_n= 0.

[p_2] AXIOMA COMPONENTELOR

Fiind dată o bază, oricărui vector *v* i se asociază cel puţin o mulţime de *n* numere reale x_{lt} x_2, ..., x_n care asigură satisfacerea egalităţii vectoriale

$$XjVi + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n = v.$$

Aşadar

-► -> -► -+ ->

Vv G *V*, 3(3?!, x_2, ..., a-„) : $x\hat{} + x_2v_2 + \ldots + Vn = V$-

TEOREMĂ DE UNICITATE

$$X\hat{} + X_2V_2 + \ldots + x_nv_n = XiVi + x_2v_2 + \overset{\cdots +}{}$$

este echivalent cu

$$(a\text{-}; — \quad + (x_2 — x_2)v_2 + \ldots + (a\text{-}n — a:_n)v_n = 0,$$

prin urmare, conform axiomei [Pi]

DEFINIŢII. Fiecare din vectorii *x^i* (unde *i* este un întreg n) se numeşte *o componentă* a lui *v,* componenta lui *v* pe $v_{1?}$ iar *x,* este *măsura acestei componente.*

Prin urmare, odată aleasă o bază a spaţiului vectorial, fiecare vector are un sistem de componente determinate în raport cu această bază.

Avertizare

Din motive tipografice, în lucrările tipărite vectorii sînt repre- zentaţi cel mai adesea prin litere cu caractere grase, şi nu prin litere cu o săgeată plasată deasupra, aceasta din urmă neavînd alt rol decît de a ne aminti originea geometrică sau cinematică a noţiunii abstracte. Ne vom folosi şi noi de această uzanţă. în cele ce urmează, vom întîlni, aşadar, ▼ în loc de *v* şi AB în loc de AB.

într-un text manuscris, se va reveni însă la notaţia primitivă, pentru a evita orice confuzie.

b) **Problema schimbării bazei. Aşa cum vom vedea imediat, această problemă conduce la rezolvarea şi discutarea unor sisteme de ecuaţii de gradul întîi. Presupunem că s-au studiat deja, în algebră, cazurile cele mai simple de asemenea sisteme, ca aplicaţii ale proprietăţilor numerelor reale (v. Cartea a Il-a). De aceea, pentru a putea folosi aceste sisteme simple, presupuse că au fost studiate direct, ne vom limita la spaţii cu una sau două dimensiuni. Trebuie însă spus că, în cazul general, se procedează invers; studiul direct al spaţiilor vectoriale cu *n* dimensiuni este cel care permite studiul sistemelor generale de ecuaţii liniare. Acest studiu constituie *algebra liniară,* pe care însă noi nu o vom dezvolta; ea introduce matrice şi determinanţi.**

Fiind dată o bază a unui spaţiu vectorial, problema constă în a determina condiţia pentru ca un alt sistem de *n* vectori să formeze o bază, şi în a determina componentele unui vector oarecare în raport cu această nouă bază, pornind de la componentele relative la baza

veche.

1) SPAŢIU CU O DIMENSIUNE *n* = 1.

Baza este constituită dintr-un singur vector Vj. în raport cu această bază, orice vector v este determinat prin v = Orice

alt vector, cu excepţia vectorului nul o, constituie şi el o bază; intr-adevăr, dacă

$$\mathbf{Wi == ajVj,}$$

de aici deducem

$$\mathbf{v - Xl^{m}! — 0,2'1?!.}$$

Prin urmare, după teorema de unicitate aşadar

$$\mathbf{^{x}i = O'iXi;}$$

$$x_1' = \frac{\cdot T_i}{a_1}$$

valoare care este acceptabilă, deoarece a_x nu este nul.

2) SPAŢIU CU DOUĂ DIMENSIUNI *n* = 2. O bază este constituită de o pereche de vectori ($v_{1(}$ v_2).

a) *Condiţia pentru ca o pereche (yf-i,* w_2) *să constituie o bază.*

Scriem (pentru a evita introducerea unor indici dubli)

$$\mathbf{\{\ w_t\ \_ - a?!} + 6v_2$$

$$\mathbf{w_2 = a'v_x +} 6'v_2,$$

ceea ce este posibil, fiindcă *(y-i,* v_2) constituie o bază.

Trebuie să exprimăm că nu există soluţii nenule pentru ecuaţia vectorială

$$\mathbf{^{r}i^{w}i\ r\ r_2w\ L\_\ 0}$$

care, folosind axiomele, se scrie:

$$\mathbf{(ar_x + a'r_2)^{v}i + (^1 + b'r^y_2 = 0.}$$

După axioma [p_x], această relaţie este echivalentă cu sistemul de ecuaţii între numere

$$\mathbf{I\ arj + a'r_2 = 0}$$

$$\mathbf{6r_x + b'r_2 = 0.}$$

Ştim (v. Cartea a Il-a, Algebra) că condiţia care exprimă că singura soluţie este r_x = r_2 = 0, este

$$\mathbf{8 = ab' —a'b=^0.}$$

Aceasta este deci condiţia ca (w_1; w_2), să formeze o bază. Dacă, din contra,

$$8 = ab' - a'b = 0,$$

sistemul dă o infinitate de soluţii nenule de forma

$$r_1 = ka \quad , \quad r_2 = -ka \quad ,$$

aşadar $a_1 w_1 = a w_2$.

În acest caz, Wj şi w_2 fac parte dintr-o aceeaşi submulţime cu *o* dimensiune.

Spunem că ei sînt *coliniari sau paraleli.* Aceasta este condiţia care, în spaţiul nostru cu două dimensiuni, exprimă că aceşti doi vectori nu formează o bază.

|3) *Calculul componentelor unui vector în noua bază.*

Fie că noua bază (w_1; w_2) este dată în raport cu baza veche prin

$$\begin{cases} w_1 = a'v_1 + a'v_2 \\ w_2 = a'v_1 + b'v_2 \end{cases}$$

Scriem

$$v = xv_1 + yv_2 = Xw_1 + Yw_2.$$

Eliminarea lui Wj şi w_2 dă

$$xv_1 + yv_2 = (aX + a'Y)v_1 + (bX + b'Y)v_2.$$

Teorema de unicitate cere atunci

$$\begin{cases} x = aX + a'Y \\ y = bX + b'Y, \end{cases}$$

precum şi, datorită faptului că $ab' - a'b \neq 0$,

$$X = \frac{b'x - a'y}{ab' - ba'}$$

$$y = \frac{-bx + ay}{ab' - ba'}$$

3) ÎN SPAŢIUL CU TREI DIMENSIUNI, calculul este analog dar mai lung, şi nu-1 vom face. Vom admite

rezultatul: condiţia ca trei vectori w_{lt} w_2, w_3 să formeze o bază este ca un anumit polinom A în raport cu cele 9 măsuri ale componentelor acestor vectori să nu fie nul. în cazul particular A = 0, ei nu formează o bază şi ■spunem că aceşti vectori sînt *coplanari.*

Cu ajutorul teoriei determinanţilor, putem generaliza aceste rezultate la un număr oarecare de dimensiuni ale spaţiului. Posibilitatea de a găsi formulele pentru schimbarea bazei arată că *proprietatea a doi vectori de a fi echivalenţi este independentă de alegerea bazei.* Exprimăm aceasta spunînd că ea este o *proprietate intrinsecă.* Numărul de vectori ai unei baze este determinat pentru fiecare spaţiu vectorial: el dă *dimensiunea* acelui spaţiu.

***c)* Orientarea spaţiului vectorial**

1) SPAŢIU CU O DIMENSIUNE. *Spunem despre un vector ? = că este* de acelaşi sens *cu y_1 dacă numărul k este pozitiv.*

Această relaţie este tranzitivă, căci, după formula pentru schimbarea bazei, dacă v este de acelaşi sens cu v_x şi este de acelaşi sens cu w_{lt} regula de înmulţire a numerelor reale arată că v este de acelaşi sens cu w_x.

Cînd dăm un vector de bază, spunem că *orientăm dreapta,* iar despre orice vector care are acelaşi sens cu vectorul de bază spunem ■că este *pozitiv.*

2) SPAŢIU CU DOUĂ DIMENSIUNI. Fiind aleasă o bază (v_x, v_2), am văzut că perechea

1 w_x = av_1 + 6v_2 w_2 _ a'v_x + t'v_2 iformează o bază cu condiţia că 8 = *ab' — ba' =f=0.*

Dacă presupunem că numerele *a, b, a', b^1* variază continuu, perechea (w_n w_2) va continua să formeze o bază atît timp cît inumărul S = *ab^1 —ba^1* va păstra acelaşi semn. Vom spune că acest semn caracterizează *orientarea* bazei.

Baza iniţială

$$1\ v_x = lv_x + 0v,$$

$$|\ v_2 = 0v_x + lv_2$$

corespunde valorii *ab′ — ba′* = + 1.

Vom spune că toate perechile de vectori care sînt astfel încît diferenţa *ab′ — ba′* este pozitivă au *aceeaşi orientare* ca (v_x, v_2). Să verificăm *tranzitivitatea acestei relaţii:* să presupunem că pere-

chea (u_{lt} u_2) are aceeaşi orientare ca perechea ($w_{1;}$ w_2) care, la rîndul ei, are aceeaşi orientare ca (v_x, v_2); cu alte cuvinte, că

Wj =_ avj 4- iv$_2$	**u$_x$ = Aw$_x$ 4- *B W$_2$***
w$_2$ = a'vj 4- t'w$_2$	**u$_2$ = *A* 'w, 4- *B***
***ab' — ba'* >0**	**'w„ *AB' - BA'* >0.**

Am văzut că formulele pentru schimbarea bazei dau

$$u_x = av_x\ 4" \hat{}v_2 = (aA\ 4\text{-}\ a'B)v_1\ 4\text{-}\ (bA\ 4^*\ b'B)v_2$$

$$u_2 = a'v_x + p'v_2 = (aA' + a'B')?! + (bA'\ 4\text{-}\ b'B')v_2.$$

Or, diferenţa a(3' —(3a' = *(ab' —ba')(AB' —BA')* este şi ea pozitivă.

Aşadar, *în orice spaţiu cu două dimensiuni definit printr-o bază există două orientări contrare.* Orice bază care are aceeaşi orientare cu baza aleasă pentru a determina spaţiul este considerată *pozitivă.*

Natural, *intervertirea celor doi vectori ai unei baze schimbă orientarea bazei.* La fel se întîmplă şi Ia înlocuirea *unuia din vectori* cu opusul lui.

3) SPAŢIUL CU TREI DIMENSIUNI. Calculul arată că condiţia pentru ca trei vectori daţi în raport cu o bază să formeze şi ei o- bază este ca un anumit polinom A de cele 9 măsuri ale componentelor să nu fie nul. Acest polinom care, pentru spaţiul cu treS dimensiuni, joacă acelaşi rol ca diferenţa 5 = *ab' —ba'* pentru spaţiul cu două dimensiuni, păstrează acelaşi semn cînd vectorii variază fără a înceta de a constitui o bază. Semnul lui caracterizează orientarea bazei. Calculul, analog celui pe care l-am făcut dar mai lung, arată că relaţia care se exprimă prin propoziţia „au aceeaşi orientare" este tranzitivă.

Vom admite acest rezultat şi vom conchide:

***Cînd se dă o bază, automat se orientează spaţiul vectorial cu trei dimensiuni. Orice bază cu aceeaşi orientare ca baza aleasă se considera pozitivă.* Permutarea a *doi* dintre cei 3 vectori ai bazei schimbă orientarea acesteia. La fel se întîmplă la schimbarea *unuia* din vectori în opusul lui.**

III. Spaţiu punctual imagine a unui spaţiu vectorial

a) **Vom defini acum'o mulţime S, asociată spaţiului vectorial construit *V,* ale cărei elemente vor fi numite *puncte.***

Să presupunem că spaţiul vectorial are *n* dimensiuni. Considerăm un element numit *punct origine* (şi notat, în general, cu litera *O),* şi *n* puncte A_{1}, A_2, ..., A_n, asociate vectorilor din bază. Scriem

$$OAi \_: v_1; OA_2 = v_2, \ldots, OA_{„} == v_n.$$

Fiecare punct *M,* element al mulţimii â, este asociat cu un vector v al spaţiului vectorial *V* şi scriem OM = v.

în fine, fiecărei perechi de puncte *AI, P* îi asociem un vector din *V* prin următoarea convenţie:

***Dacă* OM _ v *şi* OP = v', *scriem* MP 2^ v' — v.**

Cu alte cuvinte MP = OP —OM *(formula lui Chasles).*

în spaţiul punctual simbolul MP este numit tot vector, con- fundîndu-1 cu imaginea lui din *V.* (Întîlnim aici acelaşi abuz de limbaj ca Ia confundarea de pildă, a numărului natural cu numărul pozitiv.) El este *vectorul de poziţie al lui P în raport cu M.*

Din proprietăţile spaţiului vectorial V rezultă că echivalenţa (sau echipolenţa) a doi vectori din S este o relaţie intrinsecă, adică independentă de bază, precum şi de originea *O,* aşa cum o arată calculul:

MP ~OP - OM = (00' +O'P) -(00' +0'M) ~ O P — O M

b) **SUMA VECTORIALĂ; PARALELOGRAMUL**

O mulţime de 4 puncte *A, B, C, D* astfel încît

$$AB = DC \qquad (1)$$

se numeşte *paralelogramul ABCD,* sau, pe baza simetriei relaţiei de echivalenţă, paralelogramul *DCBA.* însă

[AB = DC] [AB + BD = BD + DC] <=*. [AD = BC] (2)

pe baza formulei lui Chasles. Prin urmare, paralelogramul se poate numi şi *ADCB,* sau *BCDA.* Posibilitatea de a înlocui pe (1) cu (2), sau invers, constituie proprietatea fundamentală a paralelogramului. O vom numi *intervertirea punctelor mediane în echivalenţă.*

NOTĂ DESPRE INTERVERTIREA TERMENILOR MEDIANI. Să scriem în paralel cîteva formule similare, şi totuşi distincte, care vor fi întîlnite pe parcursul Cărţii I.

Mulţimea numerelor

$$a - b == c - d \; a - c \cdot = b - d.$$

Mulţimea fracţiilor sau a rapoartelor

$$\frac{ac}{b} = \frac{}{d} \Longleftrightarrow \frac{a}{c} \frac{b}{} = \frac{}{d}.$$

AB - CD <=> AC = BD.

Mulţimea vectorilor

Mulţimea unghiurilor **icap.V, § 3)**

(a, 6) = (c, d) (mod 2π**) < » (a, c) =** ***(b, d)*** **(mod 2ir)**

şi o formulă asemănătoare pentru (mod 7v).

c) **ÎNMULŢIREA CU UN NUMĂR. DREPTE. TEOREMA LUI TALES**

1) COLINIARITATE. Spunem că trei puncte *A, B, M* sînt *coliniare* dacă există un număr *k* astfel îneît AM = ZcAB. Dacă numărul *k* parcurge mulţimea *R* a numerelor reale, mulţimea punctelor *M* defineşte o *dreaptă.* Aceasta înseamnă că, *A şi B* fiind date, există o corespondenţă biunivocă între *R* şi punctele dreptei *(dreapta reală). A* corespunde lui *k* = 0, iar *B* lui *k* = 1.

Fie M_o şi două puncte ale dreptei ® definite de (A, *B).*

Din

$$\mathbf{AM_0} = \check{A}_0\mathrm{AB}, \; \mathbf{AM! = \check{A}jAB}$$

deducem

$$\boldsymbol{YM}\ \mathrm{G}\ \circledR, \; \mathbf{M_0M = \check{A}MoM!}$$

cu

$$\check{A} = {}^{k} \sim {}^{bn}.$$

Prin urmare, *oricare două puncte ale unei drepte determină dreapta.*

Conform denumirii deja introduse, orice vector v =

XAB este paralel, sau coliniar, cu AB şi cu MQM-L, oricare ar fi perechea de puncte M_o, ale dreptei; spunem că el este un *vector director al dreptei.* Dreptele care au aceiaşi vectori directori se numesc drepte *paralele',* ele pot fi drepte confundate, sau drepte fără puncte comune.

în particular, cele *n* drepte care trec prin originea *O* şi au ca vectori directori cîte unul din cei *n* vectori de bază şi se numesc *axe de coordonate.*

2) Distributivitatea înmulţirii în raport cu adunarea vectorială dă

$$AAB = A\,AC + ACB.$$

Vom numi această relaţie *formula lui Tales.*

3) GEOMETRIA ANALITICĂ. Fiind daţi cei n vectori ai bazei şi originea *O,* axioma [p_2] asociază fiecărui punct *M* al spaţiului 8 o mulţime de *n* numere x_2, x_n, prin relaţia

$$OM = \quad + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n.$$

Aceste numere constituie cele *n coordonate ale punctului.* Există o corespondenţă biunivocă între un punct al spaţiului şi o asemenea mulţime de *n* numere reale, aşa că studiul spaţiului se poate traduce în studiul mulţimii mulţimilor de *n* numere. Această traducere constituie *geometria analitică.* Vom da, în continuare, primele teoreme ale acestui studiu, pentru spaţiile cu 2 sau cu 3 dimensiuni.

CONCLUZIE. Studiul spaţiilor & este o *geometrie.* Cînd nu se introduc alte structuri decît cele definite mai sus, singurele teoreme fundamentale sînt formula lui Cbasles şi formula lui Tales. Geometria corespunzătoare se numeşte *geometrie afină-,* ea va fi dezvoltată în partea întîi a Cărţii a IV-a.

REMARCĂ. în cele ce urmează, echivalenţa vectorilor va fi notată cu semnul = . Sperăm că noţiunile precedente au fost suficient de bine înţelese şi asimilate pentru a se evita orice confuzie, în caz de dubiu, se poate oricînd reveni la simbolul =, rezervînd semnul =

pentru numerele reale.

CAPITOLUL 4

APLICAŢIILE UNEI MULŢIMI ÎNTR-0 MULŢIME. TRANSFORMĂRI PUNCTUALE. FUNCŢII NUMERICE

Partea întîi
PUNCT DE VEDERE ALGEBRIC

§1. NOŢIUNEA GENERALĂ DE APLICAŢIE

I. Definiţie

Fie două mulţimi *E* şi *F,* distincte sau nu. Numim *aplicaţie* a lui *EînF o* lege care asociază fiecărui element al lui *E* un element al lui *F* şi numai unul singur. Dacă notăm cu *L* această lege şi cu *x* un element oarecare al lui *E,* elementul *y* asociat se numeşte *imaginea* lui *x.* Asocierea se notează

x _£_z *y* sau *x* *y = L{x)*

sau încă, urmînd tradiţia, dar cu riscul de a face confuzie între funcţie şi imagine:

y = L{x) {notaţia funcţiei de o variabilă)

Mulţimea imaginilor *L{x)* ale elementelor *x* ale unei submulţimi *XcE* se notează *L{X).*

Imaginea *L{E)* este inclusă în *F.* Dacă *L{E) = F,* spunem că *L* este o aplicaţie a lui *E pe F;* ea este o aplicaţie *surjectivă,* sau o *surjecţie.*

Un caz foarte important este cel în care fiecare element al lui *L(E)* este imaginea numai a unui singur element al lui *E.* Aplicaţia se numeşte atunci *injectivă;* ea este o *injecţie a lui E* în *F.* Despre *y = L{x)* se mai spune că este *consecventul* lui *x* care, la rîndul lui, este *antecedentul* lui *y.*

In fine, dacă injecţia este surjectivă, spunem că ea este *bijectivă.* Ea defineşte o *corespondenţă biunivocă* între *E* şi *F.* Invers, o corespondenţă biunivocă defineşte o aplicaţie bijectivă *L* a lui *E* pe *F,* şi o aplicaţie bijectivă a lui *F* pe *E,* aplicaţie care se numeşte —1 *reciproca* celei precedente şi se notează L^{-1} sau *L,* o notaţie pe care o vom justifica ceva mai tîrziu.

$$x \in E \xrightarrow[L]{} y \in F$$

O injecţie *L* a lui *E* în *F* este o bijecţie a lui *E* pe *L(E).*

Aceşti termeni „tehnici" care precizează cuvîntul „funcţie“ sînt foarte utili pentru a prescurta redactarea anumitor expuneri teoretice cu caracter general (v., de exemplu, Cartea a Il-a, cap.3 al părţii întîi.)

CÎTEVA EXEMPLE:

EXEMPLUL 1-E şi *F* sînt mulţimea numerelor reale; | $\underline{L}_x$ 3. In acest caz, *LţE) = F.*

EXEMPLUL 2. E şi *F* sînt mulţimea numerelor reale; *x* | $\underline{f}$ *s* x^2.

De data aceasta, *f(E)* este mulţimea numerelor pozitive sau nule. Fiecare *y,* diferit de 0, este imaginea a două elemente *x.*

EXEMPLUL 3.

$$^{x} = y^2 \mid \underline{?} > \blacksquare\ y$$

nu este o aplicaţie decît dacă se precizează semnul lui *y.* Mulţimea de plecare *E* nu poate fi decît mulţimea numerelor pozitive sau nule, sau una din submulţimile acesteia.

EXEMPLUL 4. *E* este mulţimea perechilor de numere reale *(x,y). F* este mulţimea numerelor reale *u.* Aplicaţia este definită prin

$$(x, y) \mid ^{s} u = x + y.$$

Putem scrie, aşa cum am mai spus, şi *u =s(x, y),* care este notaţia *funcţiei de două variabile.*

Aşadar

$$«(a:, y) = x + y.$$

EXEMPLUL 5. *E* şi *F* sînt confundate — sînt mulţimea punctelor din plan, *x* \JŞ_z *y* este definită prin condiţia că vectorul xy este echipolent cu un vector dat v. Aplicaţia se numeşte o *translaţie* de vector v. Ea este o *corespondenţă punctuală* între punctele planului.

EXEMPLUL 6. *E* este mulţimea punctelor unei circumferinţe, *F* este mulţimea dreptelor din plan. Fiecărui punct *x* al lui *E* i se asociază tangenta în *x* la circumferinţă. Mulţimea L(E) este mulţimea tangentelor la circumferinţă, care se mai numeşte şi „circumferinţa tangenţială'[1], imagine a „circumferinţei punctuale" *E.*

PRODUSUL A DOUĂ APLICAŢII

Fie mulţimile *E, Elt E2.* O aplicaţie L_x asociază lui *x* G *E* o imagine x_t G E_{lt} iar o aplicaţie L_2 asociază lui x_1 o imagine x_2 E_2. Aplicaţia *L* care, oricare ar fi *x* din *E,* asociază lui *x* imaginea x_2 se numeşte *produsul* aplicaţiilor L_1 şi L_2. Folosim schema

$$Vx,\ x\ £\ E \xrightarrow{L} x_2\ E_2$$

Deoarece x_t =L^x) şi $x_2 = L_2(x_1)$, scriem $x_2 = L(x) = E_2[L_1(a:)]$ *(Notaţia funcţiei de funcţie).* Dar aplicaţia *L,* considerată ca rezultat al unei operaţii numite *produs* înj mulţimea aplicaţiilor, va fi notată şi $L = L_r$ X L_2. Uneori, ca o reminiscenţă a notaţiei funcţiei de funcţie, se scrie şi $L = L_2oL_1$, expresie care trebuie citită *de la dreapta la stingă* (mai întîi *Lf)*; noi însă *nu* vom folosi această din urmă notaţie.

PROPRIETĂŢILE PRODUSULUI A DOUĂ APLICAŢII. Să remarcăm înainte de toate că noi folosim un simbol = care înseamnă că fiecare element al lui *E* dă aceeaşi imagine în urma celor două aplicaţii. Trebuie însă reţinut că această relaţie de echivalenţă este relativă la

mulţimea de plecare *E:* de pildă, vom vedea în geometria plană că dacă *E* este mulţimea punctelor unei drepte *D,* atunci o simetrie 5 în raport cu (o dreaptă A şi o anumită rotaţie *R* dau aceleaşi imagini; putem deci scrie *S = R,* dar relaţia nu mai este valabilă dacă extindem mulţimea de plecare la întregul plan.

Să examinăm acum axiomele pentru operaţia produs. Justificarea afirmaţiilor care urmează rezultă din examinarea schemelor.

[AJ *L = L'* şi *M = M' L* X *M = L'* x *M'*

$$*^{x},\ {}^{x}\left|\frac{L}{L'}\right)\ {}^{x}i <\left(\frac{M}{M'}\right)\ x_2$$

[A_3] Asociativitate

$$\text{Va;, } x \mid \underline{\text{A}}\ \text{y}\ x_1 \mid \text{y»}\ x_2 \mid \underline{\hat{}3}\ y\ x_3$$

$$\text{\_\_\_\_\_A Ai\_\_\_\_\_/■}$$

[A"] Simplificare la stînga *L* X *M = L* X *M' => M = M'*

$$*^{x},\quad \frac{M}{M'}$$

Simplificarea la dreapta s-ar putea însă să fie interzisă: fAÎ] *L* x *M = L'* X *M* este compatibilă cu *L =/= L'.*

$$Vx,\ x\ '\ \frac{L}{\},^{x}\}\ M\ x_2$$

Această simplificare este permisă numai dacă x_2 nu are decît un singur antecedent prin *M,* adică dacă corespondenţa $E_y \mid M\ {}_{z}M\{E)$ este biunivocă.

EXEMPLU. în mulţimea numerelor reale nenule considerăm

$$x\left|\_\frac{L}{X}\ s\text{--},\qquad —V\backslash\_M\_{}_{z}î)^{2}.\right.$$

Avem atunci *L* X *M = L'* X *M,* fără însă să avem *L = L'.* în fine, [A_2] (Comutativitatea) este în general falsă, aşa cum o arată exemplele de mai sus.

Aşadar, cuvîntul „produs“ indică aici o operaţie care nu are toate proprietăţile [A].

II. Grupul aplicaţiilor unei mulţimi pe ea însăşi

(Amintim că spuneam despre o mulţime înzestrată cu o operaţie asociativă că formează un grup în raport cu această operaţie dacă:
1) produsul a două elemente ale mulţimii aparţine mulţimii;
2) există un element neutru pentru acea operaţie ; 3) fiecare element are un simetric, element care este astfel încît produsul acestor elemente este elementul neutru.)

într-o aplicaţie a unei mulţimi *E* pe ea însăşi se poate întîmpla ca un element să coincidă cu imaginea lui. Spunem că un asemenea element este *invariant-* în aplicaţie.

Aplicaţia care este astfel încît fiecare element este invariant se numeşte *aplicaţie identică.Ea* este, evident, elementul neutru al produsului de aplicaţii. 0 reprezentăm prin simbolul *3.*

Prin definiţie, produsul a două aplicaţii este o aplicaţie şi există asociativitate. în fine, am spus că o aplicaţie are o aplicaţie inversă dacă ea

$$'ix, x \pounds E, x' \underset{L'}{\overset{L}{\_\_\_\_\_}} y \; y \qquad [L \times L'^{1} = J].$$

stabileşte o corespondenţă biunivocă a lui *E* pe ea însăşi.

Prin urmare, *mulţimea aplicaţiilor biunivoce ale lui E pe ea însăţi formează un grup.*

Se poate întîmpla ca şi o submulţime a unor asemenea aplicaţii să formeze un grup: de exemplu, în mulţ imea deplasărilor în spaţiul *E,* mulţimea translaţiilor, sau mulţimea omotetiilor şi translaţiilor.

APLICAŢIA PE EA ÎNSĂŞI A UNEI MULŢIMI CU UN NUMĂR FINIT DE ELEMENTE

Nunierotînd elementele mulţimii, formăm din ele un *şir:*

$$x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_n$$

Aplicaţia nu face decît să schimbe indicii; o numim o *permutare.* Mulţimea lor formează, evident, un grup.

Printre aceste permutări, distingem *permutarea circulară* care schimbă fiecare indice i în i + 1, iar ultimul indice *n* îl schimbă în primul indice, 1. Să considerăm puterile succesive ale unei permutări circulare: puterea a *n* — a este, evident, transformarea

identică, şi mulţimea acestor puteri formează un grup. Acestui grup îi este asociată o ordine a elementelor, presupuse plasate pe o linie închisă analoagă unei circumferinţe. Pentru a defini permutarea circulară *P* de la care se pleacă, trebuie să se definească un sens de parcurgere a acestei linii, dar deoarece $P^{n-r} = P^{n+r}$, sensul nu intervine în grupul puterilor. Acest grup caracterizează un *ciclu* de *n* elemente. De exemplu, dacă există 4 elemente, există trei cicluri. Dacă aceste elemente sînt 4 puncte ale unui plan, mulţimea se numeşte cvadripunct sau, mai uzual dar impropriu, *cvadriunghi-,* fiecare dintre cele trei cicluri determină cîte un *patrulater* (făcînd un desen, se vede imediat că ele sînt: unul convex şi două stelate, sau sînt toate trei concave).

ALT EXEMPLU DE SUBGRUP AL GRUPULUI PERMUTĂRILOR. Fie mulţimea £ a 4 numere reale *a, b, c, d.* Să considerăm toate permutările care păstrează valoarea lui *ab + cd.* Găsim 8 asemenea permutări, inclusiv operaţia identică: imaginea lui (a, *b, c,* d} poate fi:

***{a, b, c,* d}, sau {a, *b, d,* c|, sau *(b, a, c,* d}, sau {6, *a, d,* c} sau {c, d, *a,* 6}, sau {d, *c, a,* 6}, sau {c, d, *b,* a}, sau {d, c, *b,* a}.**

---

† Vocabular

O *transformare punctuală* este o aplicaţie pe el însuşi a spaţiului punctual, fie în geometria afină cu două sau 3 (sau n) dimensiuni, fie în geometria metrică pe care o vom introduce mai tîrziu.

Deseori transformarea se aplică unei submulţimi *F* a lui *E* pe care o numim *figură.* Imaginea lui *F* este o figură *F′*. Dacă notăm aplicaţia cu <5:

F \ S *s F′* sau, în altă notaţie, *F′* = 5(F).

Să ne limităm la cazul în care transformarea stabileşte o corespondenţă biunivocă între figurile *F* şi *F′,* şi aceasta oricare ar fi F; este cazul în care are o inversă, transformarea £>$^{-1}$. Este

(în primul rînd, se permută fie primele două elemente, fie ultimele două; apoi din ele se deduce rîndul al doilea, permutînd între ele prima pereche şi perechea a doua.) Aceste 8 operaţii de schimbare de ordine formează, evident, un grup.

Asemenea grupuri sînt esenţiale în teoria ecuaţiilor (grupurile lui Galois).

§ 2. TRANSFORMĂRI PUNCTUALE (GENERALITĂŢI)

atunci totdeauna interesant să considerăm mulţimea puterilor pozitive şi negative ale lui şi să studiem şirul consecvenţilor şi şirul antecedenţilor unui punct oarecare *A*

--4-^{2} _5_z A^{-1} *A* *A′* *A″...*

Acest şir poate fi infinit sau nu: în acest din urmă caz, el se repetă periodic, şi transformarea identică este o putere a lui (Exemplu: rotaţia de centru *o* şi de unghi drept.)

Dacă transformarea este propria sa inversă, înseamnă că pătra- »il ei este transformarea identică; şirul punctelor se reduce la o pereche de puncte. Transformarea se numeşte atunci *reciprocă,* sau *simetrică,* sau *involutivă* (fiindcă simetria — în raport cu un punct, sau cu o dreaptă, sau cu un plan — ca şi relaţia numită involuţie sînt exemplele cele mai simple de asemenea transformări).

Ştim că un *punct invariant* la este propria sa imagine (de exemplu, centrul unei rotaţii); pentru un asemenea punct, şirul antecedenţilor şi al consecvenţilor se reduce la acel punct. O mulţime de puncte invariante formează o *figură invariantă punct cu punct* (de exemplu, planul *P* într-o simetrie în raport cu acest plan). Trebuie însă făcut deosebire între această noţiune şi cea *de figură invariantă global,* sau *invariantă în ansamblu* ; aceasta este o figură care suferă o aplicaţie *pe* ea însăşi, fiecare punct al lui *F*

avîndu-şi imaginea în *F,* fără însă ca punctele să fie invariante (de exemplu, un plan *F* perpendicular pe planul *P,* într-o simetrie ortogonală în raport cu *P).* Această aplicaţie a lui *F* pe ea însăşi se numeşte *restricţia la F a transformării.* Fireşte, această restricţie este susceptibilă de a fi definită pe figura *F,* luată singură . (In exemplul dat, este o simetrie în raport cu o dreaptă.)

Vom spune că un element — o lungime, un unghi, un volum, etc. — este invariant la transformare dacă el îşi conservă valoarea (exemplu: conservarea unghiurilor, la rotaţie). Tot astfel, şi o relaţie poate fi invariantă (de exemplu, relaţia de paralelism se păstrează la rotaţii).

***Mulţimea tuturor transformărilor biunivoce care păstrează o relaţie de echivalenţă dată formează un grup,* datorită tranzitivităţii relaţiei de echivalenţă.**

In fine, cînd studiem o mulţime de transformări, trebuie totdeauna să ne întrebăm dacă produsul este sau nu comutativ.

II. Clasificarea transformărilor punctuale

In geometrie afină, operaţiile introduse asupra vectorilor permit să se definească transformări punctuale numite transformări afine. Geometria metrică ne va permite să introducem transformări metrice (de exemplu, rotaţia). La fel —geometriile proiective, anа-lagmatice, despre care vom spune, de asemenea, cîteva cuvinte. Mulţimea tuturor transformărilor punctuale ale unei geometrii formează un grup care caracterizează acea geometrie: acest grup poate servi drept definiţie a acelei geometrii.

Vom studia, ca exerciţiu, transformări punctuale care nu sînt biunivoce, precum şi aplicaţii între mulţimi nepunctuale, în care, de exemplu, imaginea unui punct este o dreaptă, sau un plan.

III. Transmutată unei transformări punctuale printr-o alta

Fie o transformare punctuală ® prin care o figură/[7]are ca imagine o figură *F′* din acelaşi spaţiu S. Să transformăm întregul spaţiu 3, sau cel puţin mulţimea reuniune a lui *F* şi *F′*, printr-o aplicaţie imaginea lui *F* fiind $, şi imaginea lui *F′* fiind 0'. Aceasta stabileşte o corespondenţă punctuală între O şi 4>', de unde rezultă o transformare "S, conform schemei

V.W e G *F′*
**/ **
/ & *s* /
A' G 0 \ *N′* G O'

Această transformare se numeşte *transmutată* lui ® prin S. Schema arată însă că prin aceasta se presupune că 8 are o inversă, pentru ca *N* să nu corespundă decît unui singur element *M*| aşa că avem

= r[1] x s x **s, adică**

-a-(A') = § {s

Dacă [5] şi S aparţin unui aceluiaşi grup de transformări, "S aparţine şi ea acelui grup.

Aşadar, o transmutaţie este o aplicaţie a mulţimii transformărilor punctuale în ea însăşi. (Exemplu: în plan, transmutînd o rotaţie de unghi a printr-o simetrie în raport cu o dreaptă,se obţine o rotaţie de unghi —a.)

§ 3. FUNCŢII NUMERICE DE O VARIABILĂ (GENERALITĂŢI)

I. Definiţii

O funcţie numerică de o variabilă este o aplicaţie a mulţimii *R* a numerelor reale în ea însăşi. Mulţimea *X* C *R* a elementelor *x* care au o imagine se numeşte *mulţimea de definiţie* a funcţiei. Mulţimea imagine *Y* este *mulţimea în care funcţia ia valori.* Aplicaţia se notează deseori cu litera f; scriem deci:

Yx,xGX, x|_____sy^Y

sau, mai concis

Va:, *x* G *X, y =f(x').*

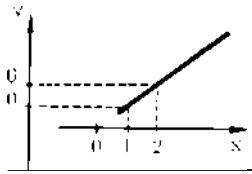
x **se numeşte *variabilă:* este elementul generic al mulţimii de definiţie.**

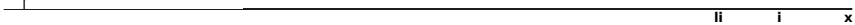
Semnul = scris aici nu face decît să indice numele atribuit imaginii lui *x.* Dacă submulţimea *X* nu este precizată, se consideră submulţimea cea mai mare a lui *R* în care funcţia este definită (de exemplu, dacă funcţia este „rădăcina pătrată[1]', mulţimea de definiţie este mulţimea numerelor pozitive sau nule.)

Grafic. Fiecărui *x* din *X* îi corespunde, aşadar, un *y* din *Y:* putem considera aceasta ca o relaţie între *x* şi *y* şi putem pune în evidenţă perechile ordonate *(x,y)* care satisfac această relaţie. Aceste perechi sînt susceptibile de a fi reprezentate ca puncte ale unui plan, *x* şi *y* fiind coordonatele punctului. în general, pentru a putea face geometrie analitică metrică în acest plan, se folosesc axe rectangulare cu unităţi egale, dar procedeul acesta nu are nimic esenţial: deseori se folosesc unităţi diferite pe cele două axe, şi nici măcar originile nu se fac coincidente. în toate cazurile, mulţimea punctelor care reprezintă perechile constituie *graficul* funcţiei.

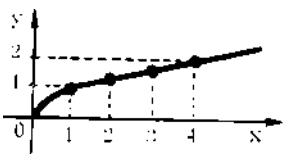
EXEMPLE.

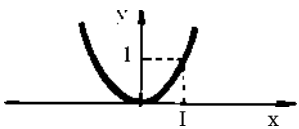
1) ***Funcţia factorial*** $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots x$ **definită pe mulţimea întregilor pozitivi. Ea se notează** $y = x|$ **Graficul ei se compune dintr-o mulţime numărabilă de puncte.**





y = ioo(.v-ij ,v

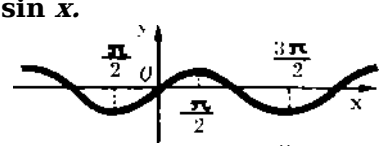




2) ***Funcţii afine,*** **al cărui grafic este o dreaptă.**

3) ***Funcţia rădăcina pătrată.*** **Funcţia este definită pe mulţimea numerelor reale pozitive sau nule. Dacă considerăm ca mulţime .V de plecare mulţimea întregilor pozitivi, funcţia ia valori într-o altă mulţime decît mulţimea de plecare.**

4) Să reprezentăm şi graficele funcţiilor $y = x^2$ **şi** $y = \sin x$.



Funcţie reciprocă. Fie o funcţie Vig $_z$ ***y*** **definită pe A'**
şi $Y = f(x)$ **mulţimea imaginilor** $f(x)$. **Dacă fiecărei/ £** Y **nu este imagine decît a unui singur element** x **G** X, **funcţia** f **defineşte o *corespondenţă biunivocă* între** X **şi** Y.
Spunem că f **este o funcţie *bijectioă de la X spre Y*; aceeaşi corespondenţă ar putea fi definită, la fel de**

bine, şi printr-o funcţie *g* bijectivă de la *Y* spre *X.*

$$\forall y \in Y,\ y \mid\_ S\_s\ x\ x\ '\ \xrightarrow[f]{g}\ \mid y$$

Aceasta înseamnă că produsul funcţiilor *f* şi *g* este transformarea identică

$$f \circ g = J\ x \mid\_ j\_s\ y \mid\_ Ş\_s\ x$$

Funcţiile *f şi g* se numesc *inverse* una alteia, sau *reciproce;* scriem —1 —1 *g = f* sau *f = g.*

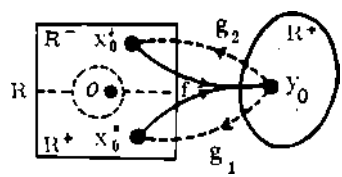
Dacă S este graficul funcţiei *f,* curbă tăiată în cel mult un punct de orice paralelă la axa *x,* graficul funcţiei *g* rezultă din (2 prin inversarea axei de plecare cu cea de sosire, adică prin simetria de axă *x = y.*

O funcţie care este propria sau inversă se numeşte funcţie *invo- lu livă*

(de ex. Vr. $x \xrightarrow{\quad} y = 3 - x$, care poate fi definită prin

$$f + y = {}^{3})$$

O funcţie care nu esie bijectivă defineşte o corespondenţă între y_0 G Y şi o mulţi.ne de valori ale lui *x,* mulţime numită *imaginea reciprocă* a lui y_0: o funcţie reciprocă nu există decît de la *Y la mulţimea părţilor* lui *X,* dar ne interesează cazul în care există o funcţie inversă între *Y* şi o *submulţime* a lui *X.*



EXEMPLE.

1) V.T G *R, X* x pătrat^, $y = x^2$, *Y* C R^+.

Se demonslrază (sau se admite) că *Y* - R^+ şi se defineşte

$$\text{VII } G\ R^+,\ U \mid \text{"I}_{\ 7}\ v = // u\ G$$

şi

$$\text{VM } G\ R^+ ,\ » \mid °2\ y\ w = — // u\ G\ R\sim-$$

2) In cazul funcţiilor trigonometrice fundamentale, se

defineşte *determinarea principală a* funcţiilor reciproce:

Inversarea funcţiei sinus:

X* = j + ~] » V" X, *u* \Ai-c sinua^, cp = Arc sin *u

(<p este arcul care aparţine lui *X* şi are ca sinus pe u).

Inversarea funcţiei cosinus:

X **= [O, 7r[, *Yv^X, V* \ Arc coeini B^ ţp = Arc COS *V.***

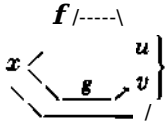
Inversarea funcţiei tangentă:

REMARCĂ. Vom avea ocazia să introducem în mulţimea funcţiilor numerice o structură de corp, care cuprinde o operaţie numită „produs" şi corespunde unui *produs al imaginilor.* în acest caz este util să precizăm cîteva convenţii de vocabular.

*_£_z _Ş_z 2 — *t =fXK=gof funcţie compusă*

F(x) = g[f(x)l.

Dacă *F = 3, f* şi *g* se numesc funcţii *reciproce.*



O = *f • g* funcţie *produs*

«I> *(x) = f(x)* ■ g(x)

Dacă *= J, f şi g* vor fi numite funcţii *inverse.*

II. Creşterea şî descreşterea unei funcţii numerice în mulţimea ei de definiţie.

Fie *X* o mulţime pe care este definită o funcţie *f.* Spunem că funcţia este *crescătoare* pe *X* dacă aplicaţia respectă ordinea. Altfel spus, dacă pentru Orice pereche $a_{1:}$ x_2 de valori *x* din mulţimea *X,* diferenţa *f(x₂)— f(xfj* are acelaşi semn ca $x_2 — x_r$. Dacă, oricare ar fi Xj şi x_2 din *X,* diferenţa *f(x₂}—/(xj)* are, dinconlră, semnul lui — *(x₂* —x_1), spunem că funcţia este *descrescătoare* pe *X.* în fine, spunem că funcţia este *constantă* pe A' dacă *f(x₂) — fl.xf)* =0 oricare ar fi x_2 şi $x_±$ din *X.*

în general, nici unul din aceste trei cazuri nu se realizează pe mulţimea de definiţie; se caulă atunci să se vadă dacă această mulţime nu poate fi divizată într-un număr finit sau infinit de submulţimi în caie să fie verificat unul (oarecare) din aceste cazuri. Pe o

asemenea submulţime A\ a lui *X* spunem că funcţia este *monotonă-,* funcţia inversă este atunci şi ea determinată, cu excepţia cazului în care funcţia este constantă.

Pe grafic, creşterea se traduce prin faptul că toate coardele *MiMz* sînt paralele cu vectori i + *kj* cu *k* > 0 (dacă numim i şi j vectorii unitari pe axele de coordonate). într-adevăr, avem

$$= (x_8 - xji\ 4\text{-}\ (i/_2 - 2/i)j = (*z - *i)\ (i + Aj)$$

cu $k = \frac{}{}$ pozitiv, conform definiţiei creşterii. Acest număr

$$^{x}t\ 7\ *i$$

k este *coeficientul director al coardei*

Tot astfel, descreşterea unei funcţii pe *X* este caracterizată prin faptul că toate coardele care unesc două puncte ale graficului au coeficienţi directori negativi.

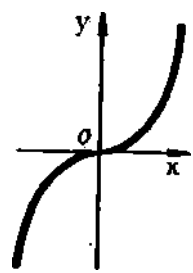
EXEMPLE 1) *k* este constant. Ecuaţia graficului este

$$^{y} = A\text{-} \text{ sau } y = kx + (y_t \sim kxj;$$
$$x - x_1$$

o ecuaţie de gradul întîi care reprezintă o dreaptă. Funcţia este

$$x \mid \underline{f}\ s\ kx + (y_x - kxj)$$

care se notează şi $y = kx\ (y_t - kx\text{-}f)$. Ea se numeşte *funcţie afină.* Printr-o veche confuzie între „linie" şi „dreaptă", ea se mai



numea şi funcţie liniară, termen rezervat acum pentru funcţiile *y = kx.*

2) Funcţia $y = x^3$ este crescătoare pe mulţimea numerelor reale căci

$$yz - yi = (^{x}z)^3 - \quad = (*2 - -^{T}i'' \quad + w + \hat{}il;$$

or, paranteza dreaptă se scrie $k = -(x_2 + .t'i)^2 + -(.r_2 - XjJ^2$

şi este deci pozitivă.

3) n **G** N, x **|_____** $s\ y = 1 - 2 \bullet 3 \ldots -n = nl$

este crescătoare în A.

Partea a doua

PUNCT DE VEDERE TOPOLOGIC

§ 1. GENERALITĂŢI: VECINĂTĂŢI. LIMITE

Topologia este ştiinţa care dă formă matematică noţiunilor intuitive care se traduc prin „este vecin", „este puţin diferit de", „tinde către", exprimări care se introduc obligatoriu în fizică ca urmare a caracterului aproximativ al operaţiilor de măsurare, iar în geometrie — prin noţiunea intuitivă de continuitate.

Vecinătăţi

1) VECINĂTĂŢI ÎN MULŢIMEA *B* A NUMERELOR REALE

Fie un număr a; vom numi *vecinătate de ordinul* a a lui *a,* şi o vom nota $V_a(a)$, mulţimea numerelor *x* care verifică

$$a - a < x < a\ Ţ\text{- a, adică } x\ G\ J\ a - a, a\ Ţ\text{- a[}$$

Presupunem deci că a este neapărat *pozitiv.*

Intervalul este *deschis,* şi aceasta pentru a asigura proprietăţile următoare:

[I\] *Oricare ar fi b din vecinătatea lui a , există o vecinătate a lui b inclusă în vecinătatea lui a.*

Va fi suficient să luăm drept număr Ş pe cel mai mic dintre numerele *a* + a — *b şi b — (a* —a), şi o vecinătate de ordinul P a lui *b.*

Nu este esenţial ca *a* să fie mijlocul intervalului, şi se numeşte de asemenea vecinătate a lui *a* orice interval deschis *]a* —[3,

***a* + y[, unde numerele p şi y sînt pozitive: un asemenea interval conţine într-adevăr o vecinătate de ordinul a, a fiind cel mai mic dintre numerele P şi y.**

Tot vecinătate a lui *a* (dar fără a preciza ordinul) se mai numeşte şi orice submulţime care conţine un interval deschis din care face parte *a.* Noi însă ne vom limita să folosim, ca vecinătate, un interval, şi, în general, *a* va fi mijlocul acestuia.

Desprindem următoarele două proprietăţi importante:

[V_2] *Reuniunea, precum şi intersecţia, a două vecinătăţi ale lui a este o vecinătate a lui a.*

[V_3] *Dacă două numere a şi b sînt distincte, există vecinătăţi ale lui a şi ale lui b care sînt disjuncte* (adică fără puncte comune). Aceasta este proprietatea dtf *separare.* Intr-adevăr, este suficient să luăm, de exemplu, V_a(o) şi V_a(6) cu a *=— |b— a|.*

2) VECINĂTĂŢI ÎNTR-0 MULŢIME OARECARE

***a* fiind un element al unei mulţimi *E,* este vorba de a defini o mulţime *"9* de submulţimi *V(a)* care conţine pe *a* şi satisface proprietăţile [Vi], [V_2] şi, dacă este posibil, şi proprietatea [V_3]. Mulţimea *? va fi ordonată prin incluziune.**

***a)* ÎN MULŢIMEA NUMERELOR REALE, am dat o definiţie în acord cu noţiunea de *distanţă* între două puncte de pe dreapta reală: *= / x_2* — Xi | . în mulţimea**

punctelor dreptei, *vecinătăţile unui punct A* de abscisă *a* sînt *segmentele deschise* care conţin pe *A,* imagini ale intervalelor deschise care conţin pe *a.* Vom lua, în general, segmente de centru *A* şi vom numi V_a(Â) şi *V_a(a)* vecinătăţile astfel definite prin | *x —a* | < a. Astfel, înlocuirea numărului *a* printr-un element *x* G V_a(a) introduce o *eroare absolută* | o: — *a* | mai mică decît a.

Putem conveni să adoptăm şi o altă definiţie a vecinătăţilor în mulţimea numerelor reale, în acord cu noţiunea de *eroare relativă: x* este vecin cu *a* dacă *x/a* este vecin cu 1. O vecinătate IVp(a) va fi mulţimea numerelor *x* care verifică

$$0 < 1 - P < - < 1 + P, \text{ adică } | x - a | < Ş | a /.$$
$$a$$

Dacă este dat a, asigurăm incluziunea W'f/aj Q V_a(a) prin P < «/I *a* / .

Dacă este dat (3, asigurăm incluziunea V_a(a) C W'^(a) prin a< p/| a|,dar lucrul acesta nu este posibil decît într-un interval mărginit (a_{lt} a_2) care nu conţine pe 0. în mulţimea numerelor reale, pe dreapta reală, aceste două definiţii determină *topologii diferite.*

b)*PUNCTE ALE UNUI SPAŢIU CU DOUĂ DIMENSIUNI (sau cu 3, sau cu *n* dimensiuni). în geometrie afină, un punct *A* este determinat prin OA = *ai + bj.

Vom defini, în mod firesc, o vecinătate (A) ca fiind mulţimea punctelor *M,* OM = *xi* +yj, care verifică

***x* e] *a — x,* a 4- <x[şi *y €=] b — £, b* + Ş[aşadar, ca fiind interiorul unui paralelogram care depinde de bază ; dacă însă se face o schimbare de bază, se va adopta intersecţia celor două paralelograme corespunzătoare.**

în geometrie metrică (vezi capitolul următor), se va adopta o definiţie legată de noţiunea de distanţă între două puncte. O vecinătate de ordinul *x* a unui punct *A* va fi mulţimea punctelor *Al* care verifică *AM < x.* Acesta este un *disc deschis.*

Mai general, în spaţiul cu *n* dimensiuni, o asemenea submulţime se numeşte *disc deschis n-dimensional.*

c) **VECINĂTATE A UNUI VECTOR. Asociem mulţimii vectorilor «in spaţiu punctual prin relaţia OL = V. în felul acesta, L_o L = V — — V_o. O vecinătate a lui V_o este imaginea unei vecinătăţi a lui L_o.**

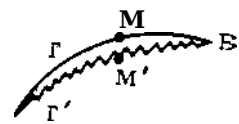
d) **VECINĂTĂŢI ALE UNEI DREPTE ÎN MULŢIMEA ® A DREPTELOR *D* DIN PLA.N. O dreaptă *D* depinde de doi parametri: o definim, de exemplu, prin ecuaţia ei *y = mx-ţ-p,* stabilind o corespondenţă biunivocă între perechile (m,p) din R^2 şi dreptele *D.* Sau, ■la fel de bine, introducem punctele în care dreapta taie axele de coordonate, sau piciorul perpendicularei coborîte dintr-un punct dat, pe dreapta *D.* Vom spune că două drepte sînt *vecine* dacă cei doi parametri care o determină au valori vecine. Aceste definiţii satisfac condiţiile [Vi], [V_2] şi [V_3J. Fiecare vecinătate de o anumită specie conţine vecinătăţi de celelalte tipuri, aşa că diferitele definiţii propuse determină o aceeaşi topologie.**

Trebuie notat că *nu* definim pe două drepte vecine o corespondenţă prin puncte vecine: topologia planului riglat nu este legată de cea a planului punctual. Cele două puncte de vedere pot fi corelate dacă se consideră o regiune mărginită a planului şi segmente de drepte.

e) **VECINĂTĂŢI ALE UNEI APLICAŢII. Să considerăm, de exemplu, mulţimea rotaţiilor în geometrie plană. O rotaţie *r* este determinată de poziţia centrului şi de valoarea unghiului: trei parame**

f) tri. Vom spune că două rotaţii *r'* şi *r"* sînt „vecine" dacă aceşti parametri iau valori vecine. De altfel, imaginile *M'* şi *M"* ale unui acelaşi punct *M* nu vor fi vecine decît dacă se consideră o regiune mărginită care cuprinde centrele rotaţiilor.

***g)*VECINĂTĂŢI ALE UNEI CURBE. într-o mulţime de ct*rbe, două arce T şi T' care unesc *A* cu *B* pot fi numite vecine dacă se poate stabili o corespondenţă a Iui D pe T', astfel încît fiecare punct *M* E r şi imaginea lui *M'* G T' să fie la o distanţă mai mică decît a. O asemenea vecinătate va fi acceptabilă într-o teorie a ariilor. Dar într-o teorie a lungimilor, evident, va trebui să se pretindă mai mult: în punctele asociate va trebui ca şi tangentele la cele două curbe să aibă direcţii vecine: studiul lungimii presupune vecinătăţi nu numai punctuale, ci şi tangenţiale.**



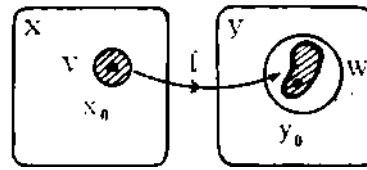
Dacă cuibele sînt grafice ale unor funcţii numerice de o aceeaşi variabilă, se va putea defini funcţiile ca fiind vecine dacă graficele lor sînt vecine, impunînd condiţii mai mult sau mai puţin exigente: vecinătate exclusiv punctuală, sau vecinătate punctuală şi tangenţială (ceea ce implică funcţiile derivate).

Continuitate şi limită

Este vorba de două mulţimi *E* şi *F* de elemente *y* şi *x,* în care au fost definite vecinătăţile V_o(o-$_0$) şi lVp(i/$_0$). 0 aplicaţie *f* a lui *E* în *F* asociază unui element *x* o imagine *y = f(x).* Se studiază corespondenţa între vecinătăţi.

CONTINUITATE. Fie dat un punct x_0 de imagine y_0 *=f(x_0}.* Spunem că aplicaţia *f* este *continuă* în :r_0 dacă, oricare ar fi vecinătatea W(r/o), există o vecinătate V(rr_0) astfel încît

x G V(a? $y \in W(y_0)$



Altfel spus, /"[(V(#o)J C W(y_0). Aceasta înseamnă a spune că există o vecinătate V(^$_o$) inclusă în mulţimea imaginilor reciproce ale elementelor lui W.

LIMITĂ. în cazul în care funcţia nu este definită în *x_0* dar este definită în vecinătăţile „găurite[11] V(x_0)— {a;$_0$}, atunci, dacă există un element X astfel încît funcţia să devină continuă dacă i se atribuie lui *x_0* această imagine, elementul X se numeşte *limita lui f* în *x_0.* Scriem:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = X \text{ sau } f(x) \longrightarrow X \quad (x \to x_0)$$

Unicitatea limitei rămîne să fie studiată în fiecare situaţie concretă.

EXEMPLUL TANGENTEI ÎNTR-UN PUNCT AL UNEI CIRCUMFERINŢE. (Folosim proprietăţile binecunoscute care rezultă din definiţie.)

Fie aşadar *E* mulţimea punctelor *M* ale unei circumferinţe *{OM = R)* şi un punct *A* G *E.* Considerăm vecinătăţile de ordin a definite prin

$$M \text{ G } V_a(A) \; AOM < a.$$

Pe de altă parte, fie *F* mulţimea dreptelor *D* care trec prin *A.* Definim o vecinătate de ordin e a unei drepte D_o prin

$$D \text{ G } \hat{I}V_e(D_0) \; D \hat{} D < e.$$

în fine, fiecărui punct *M* îi asociem dreapta *D* care trece prin *M.* Această dreaptă *AM* este determinată numai dacă *M* nu se confundă cu *A,* aşa că aplicaţia este definită în *E* — (A) (adică în *E* din care s-a eliminat punctul A).

Imaginea lui V_a(A) — {A} este mulţimea dreptelor *D* care verifică

Prin urmare, dacă considerăm dreapta *T* perpendiculară în A pe raza *OA,* vedem că această imagine este vecinătatea We(T) pentru e = a/2, din care s-a eliminat dreapta *T.*

Reciproc, oricare ar fi e > 0 dinainte ales, W_E(T) — {T} este imaginea unei vecinătăţi V_a(A) — (A) pentru a = 2e.

(Judecăm aici intuitiv: aşadar, dacă accept să neglijez un unghi a, pot confunda dreapta *AM* cu dreapta *T,* cu condiţia ca *M* să fie suficint de vecin cu A.)

Rezultatul obţinut prin reciprocă se scrie:

Ve > 0, 3a : [M G U_a(A) - {A}] *[D* G W_e(T)].

Aceasta se traduce prin una din propoziţiile:

^,D* tinde către *T* cînd *M* tinde către *A";

,,Z) admite limita *T* cînd *M* tinde către *A".*

Scriem (folosim săgeţi drepte)

$$\text{„}D \to T \text{ cînd } M \to A\text{“ sau } D \xrightarrow[M-A.]{} T$$

De reţinut că aceste propoziţii au sens numai global, fiindcă luate separat, părţile lor componente nu au nici o semnificaţie.

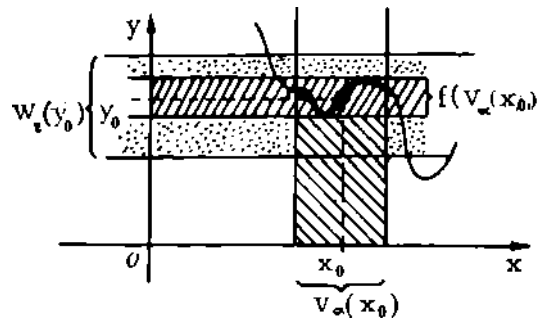
£ 2. STUDIUL LOCAL AL UNEI FUNCŢII NUMERICE

a) Presupunem că o funcţie *y = f(x)* este definită în toate punctele unui interval]a, 6[; acest interval, fiind deschis, este vecinătate pentru toate punctele sale. Toate vecinătăţile F_a(a:$_0$) pe care le vom considera vor fi presupuse incluse în]a, *b[,* •ceea ce înseamnă că vom lua pe a suficient de mic pentru a asigura această condiţie.

Fie aşadar, x_0 G] *a,* 6[; notăm $y_0 = f[x_0)$. Imaginea unei vecinătăţi U(a:o) este o submulţime a numerelor reale care conţine pe y_0 dar, dacă nu se face nici o ipoteză asupra funcţiei *f,* nu este sigur că ea este o vecinătate a lui y_0. Ne interesează cazul următor:

CONTINUITATEA ÎN PUNCTUL x_0

Spunem că funcţia este continuă în punctul x_0 dacă, oricare ar



fi E **> 0,** ***y*** **G** $W_e(j/_0)$ **oricare ar fi** ***x*** **într-o vecinătate** $U_a(a:_0)$**, numărul pozitiv a depinzînd de e.**

Altfel spus: ***O funcţie definită în] a, b [este continuă într-unpunct*** jr_e ***al acestui interval dacă, oricare ar fi numărul pozitiv*** **e,** ***există un număr pozitiv*** **a** ***astfel incit*** **/** ***x — x₀*****1 < a** ***implică*** **/** ***y — y₀*****1 < e. în limbaj simbolic aceasta se scrie**

$$Ve > 0, 3a : | x — x_0 | < a =s» | y — y_0 / <$$ E.

Aşa cum se vede clar din grafic, aceasta înseamnă că imaginea lui $V_a(z_0)$ **este inclusă în** $W_e(y_0)$**. Nu se pune însă în nici un fel problema de a căuta cel mai mare număr a care asigură această condiţie.**

EXEMPLU. Funcţia de gradul întîi ***y = mx*** **-f-** ***p*** **este continuă- în orice punct fiindcă inegalitatea |** ***y — y₀*** **| < e există de îndată ce |** ***x —x₀*** **| < e/ |** ***m*** **|. Vom lua de pildă, a =** ţ~j-

Se vede clar că a depinde de e. Dacă funcţia nu este de gradul întîi, a depinde, evident, şi de ***x₀.***

Noi ştim să exprimăm continuitatea într-un punct cu ajutorul noţiunii de limită: ne aflăm în cazul simplu în care este inutil să excludem pe ***x₀.*** **Putem enunţa:** ***Spunem despre o funcţie definită) pe*** **]a, f>[** ***că este*** **CONTINUĂ ÎNTR-UN PUNCT** rr_0 ***al acestui interval dacă f(x') tinde către f(x₀) cînd x tinde către x₀.***

b') Spunem despre o funcţie că este **DEFINITĂ ÎN VECINĂTATEA LUI** ***x₀ dacă ea este definită in anumite***

puncte, **DIFERITE DE rr$_0$,** ***ale oricărei vecinătăţi oricit de mic ar fi*** **a. Se poate însă ca ea să nu fie definită în** ***x$_0$;*** **se pune atunci problema de a şti dacă ea are o limită** ***L*** **cînd** ***x*** **tinde către** ***x$_0$,*** **adică dacă,** ***X*** **fiind mulţimea în care este definită** ***f(x'),*** **există** ***L*** **astfel îneît**

Ve > 0, 3a: [x G *X,* / *x* — a:$_0$| < a] *[* / *f(x)* — *L* | < e].

Cazul cel mai simplu, singurul pe care îl vom întîlni în Cartea a III-a, este cel în care funcţia este definită într-un întreg interval']a,6[, cu excepţia punctului ***x$_0$.*** **în acest caz, dacă funcţia are o- limită** ***L*** **cînd** ***x*** **tinde către** ***x$_0$,*** **o putem face să fie** ***definită ţi continuă în x$_0$:*** **este suficient pentru aceasta să atribuim imaginii lui» *x$_0$* valoarea** ***L.*** **Spunem că** ***L*** **este** ***valoarea adevărată a funcţiei în x$_0$.***

c) **DERIVATA ÎNTR-UN PUNCT**

Presupunem funcţia definită pe]«,£>[şi continuă în x$_0$. Alegînd[1] un e, din care rezultă un D'$_£$(î/$_0$), **există un [a]stfel încîS**

X **e K»(*o) =“* *y* G W$_E$(y$_0$).**

Punctul *M* de pe grafic, de coordonate *x, y,* este deci vecin cu punctul M_o de coordonate x_Q, y_a. Noi am vrea însă să precizăm şi dacă direcţia dreptei este sau nu vecină cu o anumită direc
ţie. Considerăm de aceea coeficientul director al dreptei M_0M:

$$\frac{y - y_a}{x - x_0}$$

funcţie care nu este definită pentru $x = x_0$, dar care este definită în oricare alt punct al vecinătăţii $V_a(a:_0)$.

Dacă *g(x)* are o limită *k* cînd *x* tinde către x_0, adică dacă vom spune că *funcţia f admite o derivată în* x_0, derivată care este numărul *k.* Aceasta înseamnă a spune că dreptele M_0M din mulţimea dreptelor din plan care trec prin M_o, sînt într-o vecinătate de ordin *z'* arbitrar de mic a dreptei *T* care trece prin M_o şi are coeficientul unghiular *k,* cînd *M* este într-o vecinătate a lui M_o de ordin a' suficient de mic. Prin definiţie, această dreaptă *T* se numeşte *tangenta* la grafic în punctul M_o. Prin urmare, a spune [funcţia admite o derivată în rr_0 este echivalent cu a spune că [icul ei admite o tangentă în M_o şi că valoarea acestei deri- e este coeficientul director al acestei tangente.

Ve' >0, 3a' : $\quad - x_0 | < a' \quad \frac{y - y_0}{x - x_0} - k < e'$,

) Remarci importante. în cele de mai sus, am presupus în i multe rînduri că o funcţie admite o limită pentru o valoare 1 variabilei. Trebuie să demonstrăm teorema:

Jnicitatea limitei. *Dacă o funcţie admite o limită L cînd x tinde ~e* x_0, *această limită este unică.*

Lltfel spus, o funcţie nu poate tinde către două limite *L* şi d *x* tinde către x_0. Aceasta rezultă din proprietatea $[V_3]$ de sepa- e care este adevărată pentru vecinătăţile definite de noi în lţimea numerelor reale în care ia valori funcţia considerată: ă $L = f = L_{\pm}$. putem considera două vecinătăţi

disjuncte $W_Z(L)$

(Este suficient să luăm e < | L —Lj |). Atunci, ă *L* este o limită, există a astfel încît imaginea lui $V_a(a:_0)$ inclusă în aşadar această imagine nu are puncte în *(Lf)* şi £$_1$ nu poate fi limită.

I) Teoremă. *Dacă două funcţii f şi g definite în vecinătatea lui x_0 aceeaşi valoare pentru orice x din]a, b[, cu excepţia, poate, a punctului x = x_0, şi dacă una din ele are o limită L cînd x tinde către x_0, atunci şi cealaltă funcţie se comportă la fel.*

Aceasta este o consecinţă imediată a definiţiei. In particular,, dacă una din funcţii, de pildă g(x), este continuă în $a:_0$, cealaltă, funcţie are o limită în T_0 şi această limită este $g(T_e)$.

EXEMPLU: Să comparăm, pentru *x* = 3, funcţiile

$$fW = \text{-------}7\ gW = {}^{x} + 3.$$

Funcţia *f* va fi definită şi continuă în *x* = 3 dacă îi atribuim, valoarea g(3) = 6.

3) Teoremele referitoare la operaţiile asupra limitelor şi asupra, funcţiilor continue şi derivabile vor fi studiate în Cartea a III-a. Vom avea nevoie totuşi să folosim pe parcursul acestei Cărţi proprietăţi care rezultă imediat din definiţii: limita sumei unui număr- finit de funcţii care au fiecare cîte o limită este egală cu suma limitelor. O proprietate analoagă este valabilă în cazul unui produs..

***d)* CREŞTEREA ŞI DESCREŞTEREA ÎNTR-UN PUNCT. Fie o- funcţie *f(x)* definită în]a, t[şi un punct x_0 al acestui interval.. Dacă există o vecinătate $V_a(sr_0)$ în care funcţia verifică**

$$\text{Vrr G } V_a(T_0),\ g(\hat{}) = \frac{\sim}{X — .T_o} > 0,$$

spunem că funcţia este *crescătoare în punctul x_0.* (Comparăm, aşa- dar, o valoare oarecare din *]a, b[* cu valoarea dată T_0, şi nu — aşa cum am făcut în cazul creşterii într-un interval — cu două valori oarecare x_r şi

x_2 din interval.)

Dacă o funcţie admite într-un punct o *derivată pozitivă k,* ea este crescătoare în acel punct, fiindcă putem defini pe a în aşa fel încîl

să asigurăm $|g(x) - k| < \frac{1}{k}$ şi deci, g(a:)>0.

Reciproc, să presupunem $g(x) > 0$ pentru orice x din (a, *b)* Nimic nu dovedeşte că *f(x)* are o derivată în x_0; dar dacă are o deri vată, această derivată nu poate fi negativă. De unde enunţurile

Teoreme. *Dacă o funcţie definită în (a, 6) este continuă î*

x_0 G]a, *b[şi admite în acest punct o derivată k,*

$k > 0 \Rightarrow f(x)$ *estecrescătoareîn* x_0

$k < 0$ *f(x) estedescrescătoare în*

f(x')crescătoare în x_0 =s> k 0

f(x)descrescătoare în x_0 =&■ k 0

•s 3. TRECEREA DE LA STUDIUL LOCAL LA STUDIUL GLOBAL

In cele ce urmează, presupunem funcţia *f{x)* definită într-un interval închis [a, 6] şi continuă în fiecare punct al acestui interval. Se pune problema de a trece de la un punct $x_{\pm}$ la un alt punct printr-un lanţ de vecinătăţi.

I. Teoreme fundamentale

■*a)* Teorema continuităţii uniforme

După definiţia continuităţii într-un punct, odată ales un număr pozitiv E, pentru orice punct x_0 din *]a, b[* există un număr a_0 .astfel încît

$$x\ 6\ ]\ a?_0 - {}^{a}o > *0 + «o\ [\ “=*\ I\ D - l/o\ I < {}^{e}\ •$$

In orice vecinătate $E_{a0}(:r_0)$ de lungime $2a_0$, graficul funcţiei est^{e} aproximat, pînă la un e , de un segment al dreptei $y = y_0$. Da^{r} pentru a afirma că în felul acesta se obţine o acoperire a lui *]a,* 6[cu ajutorul unui *număr finit* de asemenea vecinătăţi, ar trebui să cunoaştem un

minorant nenul al acestor lungimi $2a_0$, pentru diferitele puncte x_0. Această cerinţă conduce la o noţiune nouă:

DEFINIŢIA CONTINUITĂŢII UNIFORME. Spunem că o funcţie •definită pe un interval închis *[a,* 6] este *uniform continuă* dacă, pentru orice c >0, există un *d* > 0 astfel încît, pentru orice pereche x_t, x_2 din interval

***! xi — x2* I < *d* implică | J/i — J/2 ! <** E.

In 1 imbaj simbolic, aceasta se scrie

Ve >0, şi a_2 6 [a, t], >0: | *x — x₀* / < *d* / *y_Y — y₂* / < E.

Această condiţie pare mai exigentă decît continuitatea în fiecare punct, dar se constată că, în cazul funcţiilor numerice pe un interval al numerelor reale, cele două noţiuni coincid. Aceasta rezultă ■din teorema următoare:

Teorema continuităţii uniforme. *Orice funcţie definită pe un interval închis şi continuă în fiecare punct este uniform continuă în ■acel interval.*

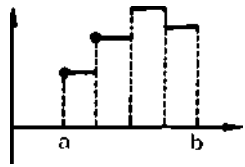
(Vom aduna la un loc, ceva mai departe, demonstraţiile diferitelor teoreme, demonstraţii care pot fi omise la o primă lectură.)

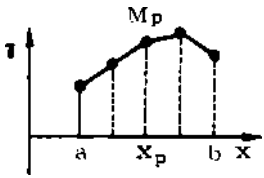
CONSECINŢE. După ce am acoperit intervalul *[a, b]* cu intervale consecutive (i_p) de lungime *d,* intervale care sînt în număr finit, vom putea alege cîte o valoare x_p a lui *x* în fiecare interval (ip) şi vom putea aproxima, pînă la un e, funcţia dată prin reuniunea de segmente de drepte care reprezintă funcţiile constante $y=y_p$ în fiecare din intervalele (i_p). Funcţia g(a>), „constantă pe porţiuni" astfel introdusă se numeşte *funcţie in scară.*

Prin urmare, dacă *f{x)* este uniform continuă pe [a, b], există o infinitate de funcţii în scară care o aproximează pînă la un e.

Invers, dacă, oricare ar fi e, există o subdiviziune a lui [a, *b]* în intervale de lungimi cel puţin egale cu *d* şi o funcţie în scară constantă pe fiecare din aceste intervale şi care verifică

Va: F *[a,* b], *|f(x) — g(x)* | < e/2,





funcţia continuă *f(x')* ete uniform continuă pe *[a,* bj, fiindcă

| a^ — a?₂ | < d => | *f(x) — g(x)* | < s •

Alte funcţii care aproximează funcţia dată pînă la un s şi care sînt, şi ele, „liniare pe porţiuni" dar care, de data aceasta, sînt continue, sînt cele al căror grafic este reuniunea segmentelor care unesc punctele consecutive

***M*$_p$*(*x_{pt} *yp>* şi* ^P+I(^P+1> J/p+1)**

Fie y(a:) o asemenea funcţie.

***b)* Teorema marginilor**

***Mulţimea Y a valorilor luate de o funcţie y = f(x) definită şi continuă intr-un interval închis este mărginită superior şi inferior* Aceste margini aparţin mulţimi Y,* adică sînt valori ale funcţiei pentru anumite valori ale lui *x* din interval.**

■*c)* Teorema valorilor intermediare

Orice valoare cuprinsă între marginile lui Y aparţine lui Y.

Aceste ultime două teoreme exprimă că imaginea unui interval închis al lui *X* este un interval închis al lui *Y.*

Demonstraţii

în cele ce urmează vom defini elemente în mulţimea numerelor reale prin „capcanele" definite în cap. 2, § 4,

III, adică prin şiruri •de intervale cuprinse unele în altele şi ale căror lungimi tind către zero:

(b] **[®i, ^i] [®2> ^2] [ªn> •••**

l Ve>0, 3.N : *n > N =&* / b_n—a_n|<e.

Fie numărul definit de şir. Să remarcăm că orice vecinătate V_a(^) a lui *Z* conţine intervale ale şirului:

Va > 0, 3N :n >*N^V_a^)* D *[a_n, b_n].*

a) *Teorema continuităţii uniforme*

1) O funcţie *f* continuă în orice punct al unui interval închis *[a,* 6] de lungime *b — a* = 8 este *uniform continuă* în acel interval dacă fiecărui £ > 0 îi corespunde un *d* > 0, astfel încît *f(x)* este ■aproximată, pînă la un e, de o constantă, în orice interval inclus în [a, *b]* a cărui lungime nu depăşeşte *d.* Aceasta ne permite să introducem pentru *x* G [a, una din funcţiile în scară *g(x)* vecine cu *f(x'),* care iau un număr finit *k* de valori.

Dacă [a, *b]* este descompus în *p* intervale parţiale prin *p* — 1 valori intermediare *a < a' < a" < ...* a<$^{p-1)}$ <Z *b,* continuitatea uniformă în fiecare interval parţial implică continuitatea uniformă în [a, 6], fiindcă/"(a) apare ca fiind aproximată prin funcţii în scară care iau

^1 + k_2 + .. • + k_p

valori constante. (Este suficient, evident, să considerăm una din aceste funcţii *g.)*

2) Dacă *f* n-ar fi uniform continuă în [a, 6], atunci, subdivizînd acest interval, în cel puţin unul din intervalele parţiale, continuitatea funcţiei n-ar fi uniformă. Să convenim să subdivizăm [a, f>]' în două intervale egale, de lungime (1/2)8, şi să numim [$a_{1(}$ fcj] unul din intervalele în care continuitatea nu este uniformă. Reite- rînd subdiviziunea, obţinem o „capcană[11]:

***{ [a,* 6] D *[a_x,* fcj] D ... D [a„, 6_n] D ... .**

***b_n — a_n* = 3/2^n**

un şir de intervale în care continuitatea nu este

uniformă.

Acest şir defineşte un număr pentru care *f* este continuă :

$$\text{Ve} > 0,\ 3V_a(E) \qquad eF.(Q,\ |f(x') - f(x'')| < e.$$

Dar vecinătatea F_a(£) conţine intervale *[a_n, b_n^* şi lipsa continuităţii uniforme dă, pentru acelaşi e şi pentru unul din aceste intervale *[a_n, b_n],*

$$[a_n, b_n]: |f(Xi) — f(x_2)| > s.$$

I ^2

S-a ajuns deci la o contradicţie.

Prin urmare, continuitatea în [a, t] este, în mod necesar, continuitate uniformă.

b) Teorema marginilor

Datorită continuităţii uniforme, odată ales e , aproximăm pe *f(x)* printr-o funcţie în scară *g(x).* Aceasta nu ia decît *k* valori;, prin urmare ea este *mărginită;* în consecinţă, şi *f(x)* este mărginită în [a, £>]. Mulţimea valorilor ei în Y C *R* are deci o margine superioară *M* şi o margine inferioară *m.* Să considerăm, de pildă, marginea *M.*

In descompunerea deja operată a intervalului *[a,* 6] în două subintervale egale, fiecare subinterval are o margine superioară , şi cea mai mare dintre aceste valori este egală cu Af. Aceasta înseamnă că -V este marginea superioară a funcţiei în cel puţin, unul din intervalele parţiale, interval pe care îl vom numi [uj, fcj].. Reiterînd subdiviziunea, ajungem din nou la o „capcană[1]'. In fiecare interval al acestui şir marginea superioară este *M.* Fie £ numărul definit de capcană.

Evident, f(Ş) *M.* Dar inegalitatea /'(ţ) < *M* este imposibilă,, fiindcă din ea am deduce o vecinătate V_a(^) în care marginea. superioară ar fi mai mică decît *M,* dar care ar conţine intervale [<Z_n j bn]-

Aşadar, punînd *E, = x_M,* avem *f(x_M) = M.*

în mod analog se demonstrează existenţa unui număr *x_mE [a,* 6] astfel încît *f{x^} = m.*

Diferenţa *M —m* se numeşte *oscilaţia* funcţiei în [a, t].

c) Teorema valorilor intermediare

Fie p cuprins între *m* şi *M.* Să presupunem, pentru a fixa ideile, că $x_m < x_M$ şi fie 5C mulţimea valorilor *x* G *[x_m, x_M]* care verifică *f(x)* p. Această mulţime — care nu este vidă, fiindcă îl conţine pe x_M —este minorată de x_m; prin urmare, ea are o margine inferioară *x^.* Aceasta înseamnă că

1) *x^* este un minorant al lui 5C:

$$x \in X \Rightarrow x \geq x^.$$

2) Valoarea *x^* este cel mai mare minorant:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad x^ - \varepsilon \text{ nu este minorant.}$$

Dar atunci inegalitatea *flx^)* > p este imposibilă fiindcă altfel ar exisla o vecinătate C 5C, în timp ce $V_a(a:_{ll})$ ar conţine
valori *x* < *x^*, ceea ce este în contradicţie cu 1).

însă şi *flx^)* < p este imposibilă, fiindcă altfel ar exista o vecinătate ^„(3-^) ale cărei elemente ar verifica *f(x'j* < p şi am avea

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in V_a(x^) \cap X, \quad f(x) \geq p,$$

ceea ce este în contradicţie cu 2).

Prin urmare *f^x^)* = p.

REMARCĂ. Putem enunţa proprietăţile *b)* şi c) spunînd: *Imaginea printr-o funcţie continuă a unui interval închis [a,* 6] *este un interval închis.*

II. Aplicaţii Ia funcţii definite, continue, derivabile|

Să presupunem nu numai că funcţia *y = f(x)* este definită şi continuă pe intervalul închis [a, *b],* dar şi că admite în fiecare punct a-Q al acestui interval o derivată *k.* Mulţimea acestor numere *k* constituie *funcţia derivată f'(x').*

Completăm teorema marginilor remarcînd că *f'(x_m)* şi

sînt nule dacă x_m şi absint *în interiorul* intervalului, adică dacă aceste valori aparţin intervalului deschis]a, fr[. într-adevăr, raportul

$$«M = \frac{}{X - X_m}$$

are semnul lui $x — x_m$ şi, prin urmare, nu are un semn constant în vecinătatea lui x_m. Limita lui, $f'(x_m)$ —care există, prin ipoteză, nu poate fi deci diferită de zero. La fel pentru $f'(x_M)$.

ENUNŢ. *Dacă f(x) este definită, continuă, derivabilă în [a, 6] şi dacă ea îşi atinge marginile în x_m şi x_M care aparţin lui*]a, 6[, *derivata funcţiei este nulă în aceste puncte.*

Corolar: TEOREMA LUI ROLLE. *Dacă o funcţie definită şt continuă în* [a, 6] *admite derivată în orice punct al lui]a, b[şi daca f(a) =f(b), există cel puţin o valoare ţ* G *în care derivata este nulă.*

într-adevăr, dacă funcţia este constantă în [a, 6], derivata ei este nulă în toate punctele; dacă nu este constantă, ea are sau o margine superioară *M* pe care o atinge în]a, fc[, sau o margine inferioară *m* pe care o atinge în]a, 6[, sau are şi una şi alta. De exemplu, dacă ea ia valori mai mari decît *f(a) = f(b),* marginea *M* există, de unde rezultă x_H GE]a, 6[şi f(i») = 0.

Consecinţa: TEOREMA CREŞTERILOR FINITE. Să nu mai presupunem *f(a) =f(b);* dreapta *AB,* unde *A* are coordonatele (a,f(a)) iar *B* are coordonatele *(b, f(b)),* nu mai este paralelă cu axa absciselor *x.* Aşa cum am văzut, această dreaptă este graficul funcţiei

<p(or) = *kx -/- f(a) — ka,* unde $k = \frac{—fţ\,\hat{}L}{b — a}$.

Funcţia *F(x) = f(x)* —<p(o-) este continuă, derivabilă în interva Iul considerat şi nulă în extremităţile acestui interval; îi putem deci aplica teorema lui Rolle; există deci un număr 5 G]®, *b[* astfel încît

$$F'tt) = 0;$$

însă

$$F'\& = f'\& = f'\& - k,$$

prin urmare, f'(?) = *k.*

Aşadar: *în condiţiile enunţate, există un punct în*]a, t[*în care tangenta la graficul funcţiei este paralelă cu coarda AB.* Concluzia se scrie:

$$3£ G]a, b[tf\{b) — f(a) \quad E) (b - a).$$

(Cuvîntul „finită" în expresia „creştere finită" este folosit în opoziţie cu definiţia derivatei, în care creşterile *b* —a şi *f(b') —f(a)* tind către 0 şi sînt ceea ce se numeau cîndva — şi se mai numesc încă, uneori, în mod cu totul impropriu —„infiniţi mici".)

Studiul creşterii unei funcţii într-un interval cu ajutorul derivatei

Presupunem în continuare funcţia /(x) definită, continuă în [a, *bl* şi derivabilă în]a, 6[.

«) Dacă o funcţie este constantă într-un interval, ştim că derivata ei este nulă în toate punctele acelui interval. Reciproc, să presupunem că derivata este nulă în toate punctele lui (a, *b).* După teorema creşterilor finite, orice coardă a graficului este paralelă cu axa x; prin urmare, funcţia este constantă în interval.

De unde — următoarele două enunţuri foarte importante:

Dacă o funcţie are o derivată invariabil nulă într-un interval, ea este constantă în acel interval.

***Dacă două funcţii au aceeaşi derivată* <p(x) *într-un interval, ele nu diferă între ele decît printr-o constantă.* (într-adevăr, calculul limitelor arată că derivata unei diferenţe este diferenţa limitelor). Vom utiliza această teoremă în cap.6 al acestei Cărţi.**

***b)* Dacă o funcţie care admite o derivată într-un interval este crescătoare în acel interval, ea este crescătoare şi în orice punct al intervalului, iar derivata ei este pozitivă sau nulă. Reciproc, să presupunem derivata (strict) pozitivă în orice punct al intervalului. După teorema creşterilor finite, toate coardele au pante**

pozitive; prin urmare, funcţia este crescătoare în interval. Această creştere se notează cu semnul ; aşadar

$$\forall x \in (a, b),\ f(x) > 0 \Rightarrow f \text{ în } (a, b)$$

$$\forall x \in (a, b),\ f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ în } (a, b).$$

Rezultă de aici că pentru a determina intervalele în care o funcţie continuă, derivabilă este crescătoare sau descrescătoare, este suficient să se studieze semnul acestei derivate. în fiecare interval în care acest semn rămîne neschimbat, funcţia este crescătoare (dacă semnul este -|-) sau descrescătoare (dacă semnul este —). In fiecare din aceste cazuri spunem că funcţia este *monotonă* în interval. Corespondenţa între *x* şi *y* este atunci biunivocă şi, după teorema valorilor intermediare, funcţia inversă f^{-1} este definită şi continuă pe intervalul [m, *M],*

DEFINIŢII. O funcţie continuă admite *un maxim* în x_0 dacă ea este crescătoare într-un interval (a, x_0), şi descrescătoare în (x_0, b) •, $f(x_0)$ este deci marginea superioară a lui *f(x)* în (a, *b).* Dacă funcţia este derivabilă, $f'(x_0) = 0$.

în mod analog se defineşte *un minim.*

III. Extensia noţiunilor de vecinătate şi de limită

Există considerente care ne determină să adăugăm mulţimii numerelor reale două elemente notate -|-oo şi —oo care sînt definite ca fiind marginile superioară şi inferioară ale numerelor reale; trecem, în felul acesta, de la mulţimea *R* deschisă, la mulţimea închisă *R,* numită „dreaptă încheiată".

într-un interval închis [a, 6], extremităţile *a* şi *b* nu au, fireşte, vecinătăţi incluse în interval; sîntem conduşi să considerăm „semi- vecinătăţi la dreapta" pentru *a,* adică intervale [a, *a* + a[, şi semi- vecinătăţi la stînga pentru *b,* adică intervale]6 —p, &]. Tot astfel, vom defini semivecinătăţi la dreapta pentru —oo: intervale [— oo,A[, şi semivecinătăţi la stînga pentru 4*oo: intervale]A, +oo].

Deducem de aici definiţii pentru limita la dreapta sau

la stînga, pentru limita egală cu —oo şi pentru limita egală cu +oo. De exemplu: *„f(x)* tinde către *L* cînd *x* tinde către 4-oo“ înseamnă:

$$Ve > 0,\ 3A : x > A \blacksquare => |\ f(x') — L\ | < e.$$

Tot astfel, tinde către +oo cînd *x* tinde către *x₀“* înseamnă:

$$VA > 0,\ 3a : |\ x — x_0\ | < a => f(x) > A.$$

Teoremele fundamentale referitoare la funcţiile continue nu sînt valabile decît pentru intervale *(a,b)* mărginite, adică neinfinite. Funcţia era presupusă definită, neinfinită în aceste intervale. Totuşi, dacă funcţia tinde către infinit pentru (de exemplu) *x = b,* teorema valorilor intermediare rămîne valabilă.

Dacă într-un punct rr_0 funcţia nu are derivată, dar dacă raportul creşterilor are o limită la dreapta, vom spune că valoarea A_x este derivata la dreapta. Se poate întîmpla ca o funcţie să aibă într-un punct o derivată la dreapta şi o derivată la stînga de valori diferite: spunem că graficul prezintă un *punct unghiular cu semitangente* (Exemplu: *y = | x |* în punctul *x* = 0).

Notăm, în fine, că continuitatea într-un punct se exprimă prin conjuncţia a două condiţii:

$$Ve > 0,\ 3a : |\ x — rr_0\ | < a => f(x) > f(x_0) — e \quad (1)$$

$$> 0,\ 3a : |\ x — .T_0\ | < a => f(x) < f(x_0) + e \quad (2)$$

Condiţia (1) caracterizează *semicontinuitatea inferioară,* iar (2) *semicontinuitatea superioară.*

(Jn şir este o funcţie $n\underline{z}u_n$ definită în *N.* Acest şir are o
limită *L* dacă

$$Ve > 0,\ BA \text{ e } N : n > A\text{-=s>} |\ u_n — L| < e.$$

IV. Aplicaţii ale noţiunii de continuitate

Studiată de noi pentru funcţiile numerice, noţiunea de continuitate se extinde şi la alte aplicaţii.

în geometrie, elementele unei mulţimi dc puncte, de drepte, ■de cercuri..., sau ale unei mulţimi de transformări, translaţii, omotetii... pot depinde de valoarea unei lungimi, a unui unghi... •care se numeşte atunci *parametru.* Problema continuităţii poate fi abordată de îndată ce s-a ales o definiţie a vecinătăţilor în mulţimea de sosire, ceea ce se exprimă spunînd că s-a ales o *topologie* în această mulţime.

în cinematică, parametrul este *timpul.* O figură poate fi supusă unei transformări continue în timp. Dacă această figură rămîne egală cu ea însăşi (o noţiune de geometrie metrică), spune că ea efectuează o *mişcare.*

Dacă coordonatele unui punct *M* sînt funcţii continue de un parametru *t* care parcurge un interval (t_0, *tf)* al mulţimii numerelor reale, vom spune că *M* generează *un arc de curbă.* Dacă corespondenţa astfel stabilită între *t* şi *M* este biunivocă, arcul este *simplu.* (Arcul nu se poate încolăci peste el însăşi, formînd un punct dublu.) O curbă care devine un arc simplu cînd se exclude din ea *unul oarecare* din punctele ei se numeşte *curbă simplă închisă,* sau *curbă Jordan* (exemplu: o circumferinţă, conturul unui paralelogram etc.). Dacă se elimină două puncte ale unei curbe simple închise, mulţimea este formată din două arce simple, fără puncte comune; ea nu mai este *conexă.* Aceste noţiuni sînt, evident, esenţiale pentru studiul împărţirii în regiuni a spaţiului prin curbe şi suprafeţe, fapt însă pe care aici nu facem decît să-l semnalăm.

CAPITOLUL 5

INTRODUCERE ÎN GEOMETRIA METRICĂ

§ 1. DEFINIŢIA SPAŢIILOR METRICE EUCLIDIENE

Vom construi acum o geometrie, numită *geometrie metrică euclidiană,* pe care o vom deduce din geometria afină prin adăugare de noi axiome. Aceasta înseamnă că vom păstra ca esenţială noţiunea de paralelism. O elaborare axiomatică autonomă a acestei geometrii ne-ar permite, introducînd axiomele referitoare la paralelism nu de la început ci mai tîrziu, să punem în evidenţă bifurcarea spre alte geometrii, în particular, spre geometria lui Loba- cevski (v. Cartea a III-a, cap. 3). Proprietăţile cele mai esenţiale ale spaţiului vectorial metric ne vor conduce la alegerea a trei axiome, foarte intuitive şi suficient de puternice pentru a ne furniza imediat proprietăţile triunghiurilor isoscele şi teorema lui Pitagora. Ele ne vor permite să regăsim rapid baza plecînd de la care ştim de acum să construim geometria elementară numită geometrie „sintetică'[1], în opoziţie cu geometria „analitică'[1].

Pornim de la un spaţiu vectorial cu mai mult de o dimensiune. Vectorii sînt repartizaţi în clase de echivalenţă prin relaţia de paralelism. Dacă v este un vector paralel cu un vector u ales de noi, ştim că există un număr *k* astfel încît v = /cu. Considerînd vectorul u drept vector unitar pe direcţia comună celor doi vectori, numărul *k* este măsura relativă (sau măsura algebrică) a lui v. Numărul absolut | *k* | va fi numit

lungimea lui v, pe care o notăm | v].

Convenim, în fine, conform uzanţelor, să notăm cu = echivalenţa vectorilor pe care la începutul studiului am notat-o, din prudenţă, cu semnul =.

I. Introducerea unei metrici

A înzestra spaţiul vectorial cu o metrică înseamnă a permite compararea lungimilor vectorilor neparaleli. Trebuie deci presupus că există un instrument oarecare, numit „transportor de lungimi[11], care permite să se definească, pe mulţimea vectorilor, o *nouă relaţie de echivalenţă.* Despre doi vectori echivalenţi prin această nouă relaţie vom spune că au aceeaşi lungime. Astfel spus, lungimea este o clasă de echivalenţă. Vom scrie j v | = | w [(folosind tot semnul =).

Axioma $L_{\pm}$ a transportului lungimii. *Fiind dat un vector* u *de- direcţie 8 şi o direcţie* Sj, *există o pereche de vectori opuşi* v şi —v, *şi numai una singură, de aceeaşi lungime ca uşi de direcţie* Sj.

Dacă u este luat ca vector unitar al direcţiei 8, v sau — v va ff luat ca vector unitar al lui 8_X. In felul acesta, *orice vector are o- lungime* măsurată de un număr absolut | *k* | şi , reciproc, orice număr absolut este măsura lungimii vectorilor unei clase de echivalenţă. Vom spune, pe scurt, că numărul *k este lungimea acestor vectori.* Numărul 0 este lungimea vectorilor nuli.

Pentru ca noţiunea precedentă să fie utilizabilă, trebuie introduse axiome care să precizeze relaţia între vectori unitari egali, distincţi — adică de direcţii diferite. Vom alege acum nişte axiome care fac să intervină suma vectorilor.

Axioma (p) a perpendicularităţii. *Oricărui vector unitar* i *îi corespunde un vector unitar j care este astfel încît vectorii* s = i -|-j *ŞÎB' =* — i + j *au aceeaşi lungime;* ceea ce se scrie:

$$|i + j| = 1 = |i - j|$$

Spunem că j este *perpendicular* pe i; se vede uşor că el este perpendicular şi pe — i.

Să remarcăm că j nu poate fi paralel cu i, căci atunci el ar fi i sau —i, ceea ce nu poate conveni; într-adevăr

$$|i + i| = |2i| = 2 \text{ şi } |i - i| = 0.$$

In consecinţă, (i, j) formează o bază. O asemenea bază se numeşte *ortonormală* (sau *ortonormată).*

Axioma (i) aizotropiei (sau a echivalenţei bazelor ortonormale). ***Fie*** **(i, j)** ***o bază ortonormală şi un vector*** **v = a;i —j/j;** ***lungimea lui ■veste o funcţie simetrică de*** **| *x* |** ***şi*** **| *y* |*:***

$$| v| = £[x, y) = \hat{}y, x),$$

unde £ nu-şi schimbă valoarea dacă se schimbă semnul lui *x* sau al lui *y. Această funcţie nu depinde decît de x şi de y,* aşa că toţi vectorii care au aceleaşi componente în raport cu nişte baze orto- normale oarecare au aceeaşi lungime.

în particular, următorii 8 vectori: ±xi ± *yj, ± yi ± xj* au aceeaşi lungime. Afirmaţia este compatibilă cu axioma perpendicularităţii (p), fiindcă aceea implică

$$|\hat{I} + jl = I - i + jl;$$

dar (p) implică şi |i +j| =|i —j|, ceea ce exprimă că şi i este perpendicular pe j; aşadar, pentru doi vectori unitari, *relaţia de perpendicularitate este simetrică-* Cei doi vectori ii sînt, prin urmare, perpendiculari pe fiecare din vectorii ij, şi reciproc.

DETERMINAREA FUNCŢIEI £ *(x, y)*

Fie o bază ortonormală (i, j) şi un vector *unitar* u din spaţiul vectorial cu două dimensiuni astfel determinat; u = ai + Şj. Avem, aşadar, £ (a, Ş) = 1. Examinînd cei 8 vectori i ai ± Şj Şi ± P* ± aj, se constată că doi dintre ei sînt perpendiculari pe u:

$$v = Şi — aj \text{ şi } —v = — Şi + aj,$$

căci

$$u + V = (a + Ş)i + (Ş — a)j \text{ şi } u — v = (a — Ş)i + (a + Ş)j;$$

altfel spus, (u, v) formează o bază ortonormală. Să exprimăm însă pe i cu ajutorul acestei baze, eliminînd pe j; obţinem

$$(a^2 + Ş^2)\, i = au + Şv,$$

prin urmare, luînd lungimea acestui vector orientat de i

$$(oc^2 + Ş^2) = £ (a, Ş) = 1.$$

Aşadar, orice vector unitar reperat în raport cu o bază ortonormală, u = ai + Şj, este astfel încît $a^2 + Ş^2 = 1$.

Rezultă de aici, pentru un vector neunitar:

$$U = Au = xi + yj,\ x = ka.,\ y = AŞ,$$

că lungimea lui este

$$|U| = |A| = i/z^2 + i/^2 \qquad (1)$$

Prin urmare, *singura funcţie £ (x, y'j care poate conveni axiomei* (i) *este £ (x, y) =* x^2 4* y^2- Se verifică uşor că ea satisface toate condiţiile impuse; în particular,

$$I * + j I = I^{-} * + j I = 1/2.$$

CONSECINŢĂ. *Unicitatea perechii* (j, —j) *de vectori unitari perpendiculari pe* i, *într-un spaţiu vectorial cu două dimensiuni.*

Fie un vector unitar din acest spaţiu

$$u = ai\ 4\text{-}\ pj, \text{ cu } a^2\ \text{-f-}\ P^2 = 1.$$

Avem

$$| u + i | = /(a + l)^2 + P^2 = /a^2 + P^2 + 1 + 2a$$

$$| u - i | = |/(a - l)^2 + p^2 = /a^2 + p^2 + 1 - 2a.$$

Aceste două lungimi nu pot fi egale decît pentru a =0, P=± 1; aşadar u, perpendicular pe i, nu poate fi decît j sau —j.

Prin urmare, fiind dat un vector unitar u = ai 4- pj, singurii vectori unitari perpendiculari pe el din spaţiul vectorial cu două dimensiuni sînt

$$v = pi — aj \text{ si } —v = —pi\ 4\text{-}\ aj$$

pe care i-am identificat deja ca atare.

Se numesc *direcţii perpendiculare* direcţiile a doi vectori unitari perpendiculari, şi vectori perpendiculari — vectorii care au asemenea direcţii; ei sînt deci astfel îneît

$$U = Au = zi\ 4\sim\ 2/j, V = k'v = x'i\ 4\text{-}\ y'j,$$

unde

$$u = ai\ 4\text{-}\ Pj, v = pi — aj, a^2\ 4\text{-}\ p^2 = 1.$$

Deducem de aici

1 *x = kx* Iz' = A'p, de unde *xx' yy' =0* (2)
| y = /cp / *y'* = — A a

Invers, fie

U —■ zi 4~ ?/j = Ău, V = *x'i* 4~ *y'j = k'v*

unde u şi v sînt unitari; relaţia $xx' + yy' = 0$ implică perpendicularitatea vectorilor u şi v.

într-adevăr, punînd u = ai + Pj, v = a'i + P j, ajungem la

| + PP' = 0 ,adică ^ = ^
1 a² + P² = 1, a'² + p'² = 1 0' «

aşadar

cu

$$p^2 \quad \frac{a'^2 +}{a^2 +}$$

CONCLUZIE. ***în spaţiul vectorial cu două dimensiuni, presupunînd că vectorii sînt determinaţi cu ajutorul unei baze ortonormale, lungimea unui vector este dată de formula***

$$|U| = /a^2 + u^2 \qquad \textbf{(1)}$$

iar condiţia de perpendicularitate a doi vectori **(se mai spune şi** ***condiţia de ortogonalitate)*** **este**

$$xx' + yy' = 0 \qquad (2)$$

II. Aplicaţie la spaţiul punctual cu două dimensiuni

Spaţiul este reperat printr-o origine O şi o bază ortonormală (i, j). Fiecare punct *M* este definit prin OM = ai *yj.*

***a) Numim distanţă între două* puncte A/, Af'lungimea | MM'| = = | M'M|; o notăm *MM'*. Prin urmare,**

$$MM' -]/\{x - x'Y + (y - y'Y -$$

i) RELAŢIE ÎNTR-UN TRIUNGHI

Fie un triunghi *ABC,* AB = cu, *AC* = tv, *b* > 0, c > 0, unde u şi ▼ sînt vectorii unitari pe *AB* şi *AC.*

Fie u' vectorul unitar perpendicular pe u ales în aşa fel încît, în determinarea lui v în raport cu baza ortonormală obţinută,

$$v = au + Pu', (a^2 4\sim P^2 = 1),$$

numărul p să fie pozitiv. Spunem că u' este de aceeaşi parte cu v în raport cu suportul lui u. Deducem de aici

$$BC = AC — AB = bv — cu = (Z»a — c)u + 6pu'.$$

Să notăm | BC | = *BC =a;* rezultă că

$$a^2 = (bv. — c)^2 + (Z>P)^2 = b^2 + c^2 — 26cx \qquad (3)$$

Prin urmare, a = 0 $a^2 = b^2 + c^2$. Acesta este cazul în care *AB* este perpendiculară pe *AC.* Spunem atunci că *triunghiul este dreptunghic* în *A;* latura *BC* se numeşte ipotenuza triunghiului. Rezultatul obţinut este *teorema lui Pitagora.*

în cazul general

$$a > 0 <=> a^2 < b^2 4\sim c^2 \text{ şi } a < 0 <=> a^2 > b^2 4\sim c^2.$$

Acest număr a introdus prin v = au 4~ |3u' se numeşte *cosinusul perechii* (u, v) şi scriem a = cos(u,v).

Numărul P se numeşte *sinusul* aceleiaşi perechi şi scriem P =sin(u,v).

Vom studia aceste numere ceva mai departe. Aici vom remarca doar că aceste numere sînt cuprinse între —1 şi 4-1, fiindcă ele verifică relaţia a² 4~ P² — !• Din formula (3) rezultă deci

(b—c)² a² (b 4- c)², **adică |*b* — c|**] 6 4“ **c** | **(3')**

unde egalitatea nu se poate realiza decît pentru a = ± 1, p = 0 caz în care cele trei puncte *A,B,C* sînt coliniare. Relaţia (3') se numeşte *inegalitatea triunghiului.* Ea este suficientă pentru a exprima că trei numere pozitive *a, b, c* sînt măsurile celor trei laturi ale unui triunghi, fiindcă dacă *b* şi *c* sînt date, atunci, conform egalităţii (3), *a* ia toate valorile de la |*b* —c| la |64~ᶜl, cînd a ia toate valorile din [—1, 4"1]-

c) *Fiind dată o dreaptă d, prin orice punct A trece o perpendiculară pe această dreaptă, şi numai una singură,* fiindcă direcţia ei este determinată de vectorii unitari j şi —j perpendiculari pe vectorii directori i şi —i ai dreptei *d.*

***Mediatoarea* unui segment este perpendiculara pe direcţia acelui segment dusă prin mijlocul segmentului. Din axioma (i) rezultă ca un caz particular, că orice punct al mediatoarei este echidistant de extremităţile segmentului. Mai geneial, teorema lui Pitagora demonstrează că distanţa de la un punct *A* pînă la un punct *M* al unei drepte este o funcţie crescătoare de distanţa de la *M*pînă la piciorul perpendicularei coborîte din *A* pe acea dreaptă.**

Teoremă. *Fiind dată o dreaptă d, fiecărui punct M îi corespunde un punct M′ astfel încît d este mediatoarea lui MM'.* Condiţia exprimă, într-adevăr, că mijlocul *H* al lui *MM'* este piciorul pe *d* al perpendicularei pe *d* duse prin *M.* Acest punct *H* este deci determinat şi *M'* se deduce imediat prin construcţia

***MH* J_ d, *H* e *d,* MM' = 2MH**

(folosind simbolul obişnuit _]_ pentru a indica ortogonalitatea). Transformarea punctuală astfel definită: cînd *d* este dat,
se numeşte *răsturnare în raport cu d* (se mai spune şi *simetrie* sau *răsucire în jurul lui d).* Dreapta *d* se numeşte *axă de răsturnare* (de simetrie) (însă cuvîntul „axă" este impropriu, fiindcă nu se presupune că *d* este înzestrată cu un sens pozitiv, aşa cum impune, în general, folosirea acestui termen).

Teoremă. *Intr-o răsturnare, distanţa între două puncte oarecare este invariantă.*

Aceasta rezultă din expresia analitică a unei răsturnări: fie i un vector unitar care orientează *d,* j un vector unitar perpendicular pe i şi *0* un punct pe *d.* Corespondenţa este definită prin

$$VA/, OM = xi + z/j, OM' = rri — yj;$$

prin urmare, pentru o pereche de puncte şi perechea imagine:

$M_xM_2 = (x_2 — a\hat{}i + (t/_2 — y_x)j$, **MjMâ =** $(x_2 — x_x)i — (1/2 —$

j/i)j şi distanţa]/[$x_2 — xfp$ **-f-** $(y_2 —$ **j/i)^2 este păstrată.**

O transformare punctuală care păstrează distanţele se numeşte o *izometrie.* Conchidem deci: *o răsturnare este o izometrie.*

***d)* CIRCUMFERINŢĂ**

1) Presupunînd că s-a ales vectorul unitar în planul metric, fie un punct dat *O* şi un număr pozitiv *R.* Să considerăm mulţimea vectorilor unitari v. Mulţimea punctelor *M* definite prin OM = /?▼ se numeşte *circumferinţă. O* este centrul circumferinţei, iar /{măsura razei ei . Analitic, dacă a şi p sînt perechile de numere reale care verifică a^2 -j- P^2 = 1, circumferinţa este locul punctelor *M* definite prin OM = *xi + yi* = /foci + /îpj, adică locul punctelor ale căror coordonate satisfac $x^2 + y^2$ = /î^2.

Teoremă* *Orice dreaptă care trece prin centru este*

axa unei răsturnări care lasă circumferinţa global invariantă.

într-adevăr, în această răsturnare fiecare vector OM îşi păstrează lungimea şi originea *O.* Aceste axe se numesc *diametre* ale circumferinţei. RECIPROC, o *figură care rămîne invariantă la* ORICE răsturnare a *cărei axă trece printr-un punct O este o reuniune de circumferinţe de centru O.*

într-adevăr, fie *M* un punct al acestei figuri; orice vector OM' de aceeaşi lungime ca OM este simetricul acestuia în raport cu mediatoarea lui MM', dreaptă care trece prin *O;* prin urmare, întreaga circumferinţă de centru *O* şi care trece prin *M* face Darte din figură.

2)Să considerăm acum un punct *M* al circumferinţei de centru *O* şi de rază *R.*

$$OM = /f(oci\ 4- |3j),\ a^2 + p^2 = 1$$

şi să considerăm pe a şi p drept nişte variabile legate prin relaţia scrisă şi variind conform tabelului:

a	**-1/0 7 +1\ 0^-1**
0	**0 7 1 \ 0 >4 — 1 / 0**

Prima parte a tabelului, care corespunde perechilor de valori —1 a 1, p 0, permite să se stabilească o corespondenţă biunivocă între punctul *M* şi intervalul [—1, -j-1] al numerelor reale X, prin relaţia X = oc.

Această corespondenţă este continuă, fiindcă unei vecinătăţi a lui *M* pe circumferinţă îi corespunde o vecinătate a lui L pe dreapta reală. (O vecinătate a lui *M* în plan este aici mulţimea punctelor a căror distanţă pînă la *M* este mai mică decît o valoare dată.) Exprimăm acest fapt spunînd că partea corespunzătoare din circumferinţă este *un arc simplu.* Acest arc se numeşte o *semicircum- ferinţă (semicerc)* fiindcă reuniunea acestui arc cu simetricul lui în raport cu o dreaptă convenabilă este circumferinţa întreagă: această dreaptă este diametrul care uneşte cele două *extremităţi ale arcului,* imaginile extremităţilor intervalului [—1, +1].

Să considerăm a doua parte a tabelului (fără a relua valoareă -f-1 a lui a)

$$+1 < \qquad -1, \qquad P\text{-}\hat{}0.$$

Ea ne permite să stabilim o corespondenţă biunivocă continuă cu intervalul]+l, +2] al numerelor reale X prin relaţia

$$\lambda = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\alpha.$$

Curba în întregime este deci în corespondenţă biunivocă continuă cu intervalul [0, 2] al numerelor reale, cu condiţia să considerăm cele două extremităţi ale acestui interval drept un singur punct. Exprimăm aceasta spunînd că circumferinţa este *o curbă simplă închisă.* Este dar că intervalul [0, 2] ar fi putut fi înlocuit cu orice alt interval închis (cf. cap. 4).

3) Cînd se dă o circumferinţă (centru *O,* raza 7Î), prin aceasta se determină trei submulţimi ale căror puncte-elemente sînt caracterizate respectiv prin

***OM = R* : circumferinţa**
***OM < R* : regiunea interioară circumferinţei**
***OM > R* : regiunea exterioară circumferinţei.**

Fie *A* şi *B* două puncte situate în regiunea interioară: segmentul *AB* este în întregime în această regiune, fiindcă el este inclus în coarda determinată de dreapta *AB.* Spunem că această regiune este *convexă.*

Dacă *A* şi *B* sînt, ambele, în regiunea exterioară, punctele pot fi şi acum unite printr-un arc simplu fără puncte comune cu circumferinţa: vom considera, de exemplu, segmentul *AC* al semidreptei *OA,* unde *C* este pe circumferinţa de centru *O* care trece prin *B,* şi vom lua apoi unul din arcele *CB* ale acestei circumferinţe.

Dacă, din contra, *A* şi *B* sînt unul —de exemplu, punctul *A* — în interior iar celălalt •— punctul *B* — în exterior, orice arc simplu care uneşte *A* cu *B* are cel puţin un punct comun cu circumferinţa. într-adevăr,

punctul generic *M* al arcului este în corespondenţă biunivocă şi continuă cu numărul *t* care parcurge un interval *[a,* 6]; prin urmare, coordonatele *x* şi *y* ale lui *M* sînt funcţii continue de t, şi acelaşi lucru este valabil şi pentru *d, = OM.*

Prin urmare, *d* ia toate valorile intermediare între *OA* şi *OB* (după teorema din cap. 4), deci ia, în particular, şi valoarea *R.*

Primele două rezultate exprimă că fiecare din cele două regiuni, cea interioară şi cea exterioară, sînt *conexe.* Se demonstrează că rezultatul al treilea decurge din faptul că circumferinţa este o curbă simplă închisă.

4) DISTANŢA DE LA UN PUNCT PÎNĂ LA O MULŢIME

Fie *A* un punct care aparţine sau nu unei mulţimi *E.* Mulţimea distanţelor AM, cînd *M* parcurge *E,* are o margine inferioară *d* (axioma de bine ordonare), care se numeşte *distanţa de la A pînă la mulţimea E.*

$$A \pounds E - d > 0; A \text{ G } E =*> d = 0.$$

Teorema 1. *Distanţa de la un punct A pînă la o dreaptă* A *este distanţa de la A pînă la piciorul perpendicularei pe* A *care trece prin A.*

Dacă dreapta este definită prin

$$M \text{ G A} <=^> \text{OM} = Xi$$

şi dacă

$$\text{OA} = \text{ai} + bj:$$

$$d^2 = \text{Inf } [(a - X)^2 + b^2]$$

prin urmare, *d* = |*b*| care se obţine pentru X = *a.*

Corolar. *Mulţimea punctelor a căror distanţă la o dreaptă* A *este dată este reuniunea a două drepte paralele cu* A.

Teorema 2. *Mulţimea punctelor echidistante de două drepte concurente este reuniunea a două drepte.*

Fie Aj şi A_2 cele două drepte concurente. O circumferinţă centrată în punctul A_x D A_2 taie pe A_r în *A* şi *A'*, şi pe A_2 în *B* şi *B'*. Mediatoarea p a lui *AB* şi mediatoarea p', distinctă de p, a lui *AB'* sînt două axe de răsturnare care schimbă între ele A_r şi A_2; prin urmare punctele reuniunii p U p' satisfac condiţiile cerute.

Alte puncte nu mai există, fiindcă fiecărei distanţe *d* îi corespunde o pereche 8_X, Sj de paralele la A_x şi o pereche S_2, â$_2$ de paralele la A_2, de unde rezultă o mulţime de 4 puncte acceptabile

$$(\&_x \text{ u si}) \text{ n } (8_2 \text{ u } s_2)$$

care nu poate fi decît mulţimea celor 4 puncte deja cunoscute

$$(8_X \text{ u sj}) \text{ n } (p \text{ u } p').$$

5) TOPOLOGIA ASOCIATĂ METRICII

a)* Aşa cum am indicat în cap.4, o vecinătate de ordinul a a unui punct *A* este mulţimea punctelor *M* care verifică *AM* < a; este interiorul circumferinţei de centru *A* şi rază a. Această vecinătate V_a(A) se numeşte *disc deschis.* El satisface definiţia generală a unei *mulţimi deschise 6:

$$YM \text{ G } <5, \text{ 3oc } : V_a(M) \text{ c } <S.$$

Un *disc închis* se defineşte prin *AM* a.

Despre punctele circumferinţei spunem că aparţin *frontierei* discului deschis, conform definiţiei metricei: *frontiera unei mulţimi este mulţimea punctelor a căror distanţă pînă la mulţimea dată este nulă, ca şi distanţa lor pînă la mulţimea complementară.*

Reuniunea unei mulţimi şi a frontierei ei este *o mulţime închisă.* Complementara acesteia din urmă nu are nici un punct frontieră. Rezultă că ea satisface definiţia unei mulţimi deschise.

Reuniunea unei mulţimi deschise cu numai o parte din frontiera ei nu este nici deschisă, nici închisă.

Nu trebuie însă să se creadă că orice mulţime

deschisă şi frontiera ei sînt analoage cu o regiune care poate fi colorată, respectiv cu conturul unei asemenea regiuni, aşa cum ar sugera-o exemplele elementare: un disc şi circumferinţa lui, interiorul unui triunghi şi linia frîntă care îl înconjură.

***b)* TANGENTE**

Aşa cum am văzut, introducerea unei topologii permite definirea tangentelor la curbe. Studiul tangentelor la circumferinţă a fost făcut folosind noţiunea de unghi (cap.4, partea a Il-a, § 1, II). Să reluăm însă chestiunea din punctul de vedere pe care ne plasăm acum.

6) TANGENTE LA CIRCUMFERINŢĂ

a)* TANGENTA ÎNTR-UN PUNCT *A.

Să alegem o bază ortonormală (i, j) astfel incit OA = *Ri.* Orice punct *M* de pe circumferinţă este determinat de OM = + w) cu $x^2 + y^2 = 1$, de unde rezultă AM = *R[(x* — l)i + yj].

A spune că *M* este într-o vecinătate de ordin a a lui A înseamnă a, spune că

$$(1 - x)^2 + y^2 < a^2,$$

ceea ce implică

$$| a: - 11 < a \text{ şi } I\ y\ | < a.$$

AM este paralel cu vectorul

---

y

şi inegalitatea

$$y\ I\ I\ x + 1\ |$$

este satisfăcută dacă a<3e.

Prin urmare, cînd *M* tinde către *A,* direcţia lui AM tinde către direcţia lui j, care este perpendiculară pe raza *OA.* Perpendiculara *l* în *A* la *OA* este aşadar, conform definiţiei, tangentă în *A* la circumferinţă .

b) **TANGENTA CONTINUĂ ÎN PUNCTUL A. Să luăm două puncte _W_X şi *M_2* arbitrare în vecinătatea de ordinul a a lui A şi să considerăm dreapta suporta coardei *M_1M_2.* Această dreaptă are puncte în vecinătatea lui A; pe de altă parte, direcţia ei este cea a vectorului *(x₂* — ifi)i + (j/2 — J/i)j> sau a vectorului**

$$\overset{x}{Vi} \overset{*\sim}{-} \overset{11}{Vi} \; \mathbf{j} \; \_|\_ \mathbf{j} = \overset{X}{1} \overset{y'}{+} \overset{x}{i} \; \mathbf{i} \; \mathbf{4.} \; \mathbf{j}$$

CU

$$\frac{I + y\underline{t}\ I}{I\ a:,\ +\ o\text{-}j\ |} < \frac{^2<*}{2(1 - a)}$$

care este mai mic decît e dacă a <—-—•
1 + e

Prin umare, *cînd* şi *M_2 tind către A după o lege oarecare, dreapta M_tM_2 are o limită care este tangenta At.* Spunem că această tangentă *este o tangentă continuă în A.* (De exemplu, dacă dreapta $Af_xA/_2$ se roteşte în jurul unui punct oarecare din plan, concluzia rămîne valabilă.)

III. Geometrie metrică în spaţiul cu trei dimensiuni

a) Două drepte se corespund prin izometrie într-o dublă infinitate de moduri. **(Se alege imaginea unui punct al uneia din drepte şi sensurile omoloage.)**

Două plane se corespund prin izometrie: **Fie, în planul *P,* sistemul de referinţă constituit dintr-un punct O şi o bază ortonormală (i, j). Trebuie ales, în planul *P',* imaginea lui *O,* imaginea lui i şi sensul asociat sensului (i, j). Corespondenţa este atunci definită prin egalitatea coordonatelor: este o corespondenţă liniară cu proprietatea că o bază ortonormală rămîne ortonormală. Ea este determinată de imaginea unui punct *O,* de cea a unei semidrepte *Ox* şi de cea a semiplanului limitat de suportul lui *Ox.***

b) Plan perpendicular pe o direcţie.

Fie i un vector unitar care orientează direcţia dată.

Printr-un punct oarecare *O* al spaţiului cu trei dimensiuni, ducem | OS = i şi OS' = -i, ipoi, în două plane care trec, ambele, prin *SS',* luăm respectiv vectorii unitari j_x şi j_2 perpendiculari pe i şi considerăm *A* şi *B* lefinite prin OA = j_x şi OB = j_2.

în planele *SAS'* şi *SBS',* ştim că avem

SA - *S'A şi SB = S'B.*

Deci, în izometria care face să se corespundă semiplanele *ABS* i *ABS'* limitate, fiecare, de dreapta *AB, S* şi *S'* sînt omoloage.

Fie aşadar *M* un punct oarecare de pe dreapta *AB.* El este inva- iant în izometrie, prin urmare *MS =MS'.* Aceasta, în planul *MS',* dovedeşte că *M* este pe mediatoarea lui *SS',* prin urmare, *M* este perpendicular pe i. Or, deoarece *M* este arbitrar pe dreapta *B,* vectorul director al lui *OM,* j, este arbitrar în planul orientat e j_x, j_2. De unde — enunţul:

Dacă o direcţie este perpendiculară pe doi vectori care orientează un plan, ea este perpendiculară pe orice vector paralel cu acel plan.

Reciproc, fie j_3 un vector perpendicular pe i într-un plan altul decît *SOA* şi *SOB.* Dreapta orientată de j_8 şi dusă prin *O* este unica perpendiculară pe i din acest plan, prin urmare ea se confundă cu dreapta *OM* comună acestui plan şi planului *OAB.* Prin urmare, toţi vectorii perpendiculari pe i sînt paraleli cu un acelaşi plan determinat de două dintre aceste perpendiculare.

Planele paralele între ele astfel definite, şi care depind de punctul ales *0,* se numesc plane *perpendiculare pe direcţia definită de* i.

Dacă alegem doi vectori unitari dintr-un astfel de plan, care sînt perpendiculari unul pe celălalt, fie ei j ŞÎ k, cei trei vectori unitari i, j, k sînt perpendiculari doi cîte doi. Spunem că ei formează o *bază ortonormală a spaţiului.*

Să alegem un punct O şi să luăm ca axe de coordonate trei axe, orientate de vectorii i, j, k care formează o bază ortonormală. Obţinem un *triedru de coordonate*

tridreptunghic, în raport cu care orice punct *M* al spaţiului este definit prin coordonatele sale *x, y, z*

$$OM = xi + \hat{i}/j + zk.$$

Lungimea vectorului v *= xi* + t/j este |/#^{2} + î/^{2}-

Insă, deoarece v este în planul orientat de i şi j, £1 este un vector perpendicular pe k; prin urmare, lungimea lui *OM* este, după teorema lui Pitagora

$$OM = \sqrt{x^2 + \hat{i}/^2 + z^2}.$$

CONSECINŢĂ. *Distanţa între două puncte date prin coordona felelor este:*

$$M_{\pm}M_2 =]/(x_1 — x_2)^2 + (\hat{i}/i — «/_2)^2 + (zi — z_2)^2 \quad (®>$$

REMARCĂ. Despre dreptele care nu sînt în acelaşi plan spunem că sînt *ortogonale* dacă sînt orientate după vectori perpendiculari.

IV. Orientarea spaţiilor metrice cu două şi trei dimensiuni

a) SPAŢIU CU DOUĂ DIMENSIUNI. Fie (i, j) o bază ortonormală ; o altă bază

$$\begin{cases} u = ai + pj \\ v = a'i + P j \end{cases}$$

are sau nu aceeaşi orientare ca (i, j) în funcţie de semnul diferenţei «0' — Pa', care, prin ipoteză, este nenulă (v. cap.3). Deoarece transformarea identică corespunde la a =p' =1, P = a' = 0, orientarea se păstrează pentru aP' — Pa' > 0.

Prin urmare, dacă se dă un vector unitar u = ai + Pj, $a^2 + p^2 = 1$ şi cei doi vectori unitari perpendiculari

$$\blacktriangledown 1 = — 0» + «j, \quad v_2 = — Vi = + pi - aj,$$

baza ortonormală (u, vj are deci aceeaşi orientare ca (i, j,) iar (u, v_2) are orientare contrară. Vom spune că v_x *este direct perpendicular pe* u *în raport cu* (i, j).

Studiul făcut în cap.3 demonstrează că dacă (i', j') are aceeaşi orientare ca (i, j), v_x este direct perpendicular pe u şi în raport cu baza (i', j'). (Faptul se poate verifica aici prin calcul.)

t) SPAŢIU CU TREI DIMENSIUNI. Fie dată o bază ortonormală (i, j, k). Pentru a scrie condiţia de ortogonalitate a doi vectori unitari

u = ai + pj + yk, v = a'i + P'j + y'k,

$$\begin{matrix} \mathbf{1\ a'^2 + p'^2 + Y'^2 = 1} \\ \mathbf{I\ a^2 + p^2 + Y^2 = 1} \end{matrix}$$

scriem că, |u +v| =|u — v|. Obţinem astfel aa' +00' + + YY' =o.

Să exprimăm că un al treilea vector unitar w = a"i + P"j + + y"k este perpendicular pe fiecare din primii doi: adăugăm primelor trei egalităţi:

$$\mathbf{a"^2 + p"^2 + y"^2 = 1,\ aa" + pp' + YY" = 0,}$$

$$\mathbf{a'a" + p'p" + Y'_T" = 0.}$$

Deducem din ele

$$PY' — YP' Y®' - a't' aP' - Pa'$$

Baza a doua este identică cu prima dacă

$$a = 1,\ p = Y = 0$$
$$P' = 1,\ a' = Y' = 0$$
$$y" = 1,\ a" = P" = 0.$$

Pentru a obţine acest caz, trebuie luat e = + 1; aşadar noua bază ortonormală va avea aceeaşi orientare ca (i, j, k) dacă luăm a" =PY' — YP', P" =Y^a' — «Y'> Y" = ^aP' — P*'- Expresiile introduse mai sus sînt importante şi le vom studia mai îndeaproape în paragraful următor.

§2. PRODUSE DE VECTORI ÎN SPAŢIUL CU TREI DIMENSIUNI

în paragraful precedent am pus în evidenţă, pentru orice pereche de vectori unitari raportaţi la o bază ortonormală

$$u = ai + pj + yk,\ v = a'i + P'j + y'k$$

pe de o parte, numărul

$$aa' + pp' + YY'$$

care, egalat cu zero, exprimă ortogonalitatea vectorilor u şi v, iar pe de altă parte, un vector unitar w perpendicular pe planul de orientare definită de perechea u, v, şi astfel încît baza (u, v, w) are aceeaşi orientare cu (i, j, k), vector definit prin

$$w = (PY' - YP')i + (Y«' - {}^aY')j + («?' - P«')k.$$

în geometrie analitică, se întîmplă rar ca vectorii daţi să fie unitari. Să considerăm, de aceea, doi vectori oarecare raportaţi la baza ortonormală (i, j, k):

A de lungime *a,* dat de $A = zi + yj + zk = au = a(ai + Pj + Y^k)$

B de lungime *b,* dat de $B = x'i + y'j + z'k = 6v = 6(a'i + p'j + {}_Y'k).$

Dacă numerele date sînt *x, y,* z, *x', y',* z', proiecţiile vectorilor u şi v se calculează cu ajutorul unor radicali care dau pe *a* şi *b,* conform formulei teoremei lui Pitagora. Vom evita însă asemenea expresii introducînd, pur şi simplu,

pe de o parte numărul relativ $p = xx' + yy' + zz'$

pe de altă parte vectorul Q = *(yz' — zy')i + (zz' —zz')j + + (xy' — x'y)lt.*

Numărul *p* se numeşte *produsul scalar* al celor doi vectori şi se notează A•B.

Vectorul Q se numeşte *produsul vectorial* al vectorilor şi se notează

AAB.

A- B= *abia-* v) **(1)**

A • B = *xx' + yy' + zz'* **(2)**

în particular, A - A = a^2.

I. Produs scalar

1) Scris sub forma (2), se vede imediat că produsul scalar este *comutativ.* De reţinut că nu poate fi vorba decît de produsul a *doi* vectori, fiindcă acest produs este un număr; nu este vorba de o operaţie internă. Astfel, (A-B)-C este produsul dintre C şi un număr.

2) Pornind de la forma (1), rezultă imediat proprietatea referitoare la înmulţirea cu un număr real *m,* exprimată prin

(mA) • B = m(A ■ B).

3) Produsul scalar este *distributiv în raport cu adunarea* vectorilor, fapt care rezultă din forma biliniară — liniară în *x, y, z* şi în *x', y', z'* — a expresiei (2):

A (B, +B_2) =(A-B_1) +(A-B_2).

De unde, mai general,

(WW = S^-B,), \ =J' 2' n

j =1,2, ..., p.

4) *Produsul scalar este intrinsec,* adică independent de alegerea bazei, *cu condiţia să se fi ales aceeaşi unitate de lungime pentru toate baze le.*

Am putea demonstra această proprietate esenţială calculînd expresiile lui A şi B după schimbarea bazei.

Dar este mai elegant şi mai interesant să deducem acest rezultat din distributivitatea în raport cu adunarea şi din proprietatea care ne-a servit ca punct de plecare: *Ortogonalitatea a doi vectori se exprimă prin faptul că produsul lor scalar este nul.* Remarcăm mai întîi că produsul scalar A-Bnu se schimbă dacă înlocuim pe B prin proiecţia lui ortogonală B_2 pe A, fiindcă aceasta revine la a adăuga lui B un vector perpendicular pe A.

însă Bj = — A, dacă b_x este măsura algebrică a lui B_r în raport *a* cu vectorul unitar u care are sensul lui A.

în felul acesta A • B = A • B_x = ab_t.

Prin urmare; *produsul scalar a doi vectori este egal cu produsui dintre lungimea unuia din ei şi măsura algebrică a proiecţiei ortogonale a celuilalt pe primul vector.*

Rezultă de aici că acest produs este, într-adevăr, independent de baza ortonormală, atît în ceea ce priveşte poziţia cît şi orientarea acesteia, cu condiţia ca unitatea de lungime să fi fost aleasă aceeaşi pentru toate bazele. Se vede uşor că a înmulţi unitatea cu X conduce la a împărţi pe *a* şi pe $b_{\pm}$ la acest număr, aşadar, la a împărţi produsul scalar la pătratul acestui număr.

CONSECINŢĂ. *Semnul produsului scalar* indică ordinea A, B, A' sau, din contra, ordinea A, A', B' a vectorilor coplanari A, B şi a vectorului A' perpendicular pe A de partea de care este situat B. în paragraful 3 în care vom introduce unghiurile, vom exprima acest fapt prin enunţul:

Unghiul (A, B) este ascuţit, drept sau obtuz după cum produsul A - B este pozitiv, nul sau negativ.

EXEMPLE DE APLICAŢII

în geometrie analitică, produsul scalar este folosit încontinuu:

1) De exemplu, un *plan* poate fi caracterizat ca fiind mulţimea punctelor *M*astfel îneît, *A* fiind un punct dat şi V un vector dat, AM este ortogonal pe V. Aceasta se va scrie ¥• AM = 6.

2) O sferă, definită prin centrul ei şi un punct *A,* este

locul punctelor *M* astfel îneît

$$\mathbf{OM\ OM = OAOA,}$$

adică

$$\mathbf{(OM \bullet OM) - (OA \bullet OA) = 0}$$

care se poate scrie

$$\mathbf{(OM - OA) \bullet (OM + OA) = 0}$$

pe baza distributivităţii şi a comutativităţii.

Prin urmare, dacă introducem punctul *A'* definit prin OA' = = —OA, definiţia devine AM'A'M =0, de unde enunţul:

Orice sferă este locul punctelor M astfel incit, A şi A' fiind diametral opuse pe acea sferă, AM şi AM' sînt perpendiculare.

3) Distributivitatea şi comutativitatea arată imediat că pentru orice mulţime de patru puncte *A, B, C, D* avem

$$\mathbf{AB \bullet CD + AC \bullet DB + AD \bullet BC = 0}$$

(se introduc vectori cu originea A).

In particular, dacă două din aceste produse sînt nule, atunci şi al treilea este nul, de unde, enunţurile:

In plan, cele trei înălţimi ale unui triunghi sînt concurente* (cele patru puncte joacă acelaşi rol. Ele formează ceea ce se numeşte un *cvadriunghi ortocentric).

In spaţiu, dacă două perechi de muchii opuse ale unui tetraedru sînt perechi de muchii ortogonale, atunci şi muchiile celei de a treia perechi sînt ortogonale* (spunem că avem un tetraedru *cu muchii opuse ortogonale').

După cum vedem, calculul cu produse scalare seamănă cu cel ou numere algebrice, numere care sînt măsuri de vectori în geometrie cu o dimensiune: numai interpretarea depinde de numărul de dimensiuni ale spaţiului în care se operează.

In fizică, dacă unul din vectori este geometric, iar celălalt reprezintă o forţă, produsul scalar măsoară un

lucru mecanic, de unde — numeroase aplicaţii.

II. Produs vectorial (Geometrie cu trei dimensiuni)

Fie din nou cei doi vectori

$$A = zi + yj - f - zk = au = a(ai + Şj + yk)$$

$$B = z'i + y'j - f - zlc = 6v = d(a'i + p'j - J - y'k)$$

şi produsul lor vectorial

$$AAB = (yz' — zy')i + (zx' — zz')j + (xy' — yx')k$$

$$= abw = ab\,[(Py' - {}_{Y}p')i + (Y«' - «Y')j + («?' — pot'JlE]$$

In particular, AAA =0.

1) *Produsul nu este comutativ* A A B = — (B A A). Uneori se spune că este *antisimetric.* în particular,

$$i\ A\ j = k,\ j\ A > = — k,\ j\ A = i,\ k\ A\ j = — »,$$

$$k\ A\ i = j,\ i\ Ak = — j$$

Vedem că, pentru a determina produsul vectorial, pe lingă alegerea unităţii de lungime, trebuie precizată şi orientarea bazei.

2) Oricare ar fi numărul real *m,* se verifică imediat că

$$(mA\ A\ B) = m(A\ A\ B).$$

3) *Produsul vectorial este distributiv faţă de adunarea vectorilor.* Aceasta rezultă din faptul că cele trei măsuri ale componentelor sînt liniare în *x, y,* z şi în *x', y',* z'.

$$A\ A\ (B_x + B_2) = (A\ A\ B,) + (A\ A\ B_2),$$

de unde

$$(SA,)\ A\ (SB;) = S(A,\ A\ B;).$$

în calcule, trebuie să fim însă atenţi la necomutativitate. De exemplu,

$$(A —B)\ A\ (A +B) = 2(A\ A\ B)$$

$$(A +B)\ A\ (A -B) = — 2(A\ A\ B).$$

Prin aceasta, calculele capătă un aspect diferit de cele conside rate de noi pînă acum.

4) *Produsul vectorial este independent de bază,* cu condiţia *să se păstreze unitatea de lungime ţi orientarea spaţiului.*

Folosim o metodă analoagă celei care ne-a reuşit la produsul scalar. Datoritădistributivităţii în raport cu adunarea vectorilor şi ţinînd seama că produsul vectorial a doi vectori coliniari este nul, *putem înlocui,* în A A B, *unul din vectori,* de exemplu pe B, *prin proiecţia lui ortogonală pe planul perpendicular pe celălalt vector.*

Presupunînd că cei doi vectori A şi B nu sînt coliniari, fie u vectorul unitar care orientează pe A şi u' vectorul unitar coplanar cu A şi B şi astfel încît A A §i A A Bau acelaşi sens. Avem A = au şi B = fcjU t_2u', unde b_2 este pozitiv.

Rezultă A A ® = ab_2(*u* A 8') = *ab^w,* dacă w = u A

Această expresie arată clar că produsul vectorial este determinat independent de bază, odată ce s-a ales unitatea de lungime şi orientarea spaţiului.

Mai mult, să introducem A' = au', şi cum u-u' = 0, avem A' • B = ab_2. De unde formula importantă

A A 8 = (A' • B)w

5) Deoarece, odată alese unitatea de lungime şi orientarea spaţiului, produsul vectorial a doi factori este un vector, putem considera produse de trei, patiu, ... *n* vectori. De exemplu,

(i A j) A j =k A j = - i-

însă *produsul vectorial a mai mulţi vectori nu este asociativ.* Faptul se vede clar pe exemplul precedent, fiindcă

i A (j A j) = i A 0 = 0.

Putem considera şi *produse mixte* în care una din operaţii este un produs scalar iar cealaltă un produs

vectorial. Astfel,

$$(i \times j) \cdot k = k \cdot k = 1, \quad i \cdot (j \times k) = i \cdot i = 1$$

$$(i \times j) \cdot (j \times k) = k \cdot i = 0.$$

însă o expresie de genul (A • B) *A* C nu are sens, fiindcă paranteza este un număr.

EXEMPLU DE APLICAŢIE. Produsul vectorial nu este un vector ca oricare altul, fiindcă nu este suficient să se dea o figură, trebuie să fie date, în plus, o unitate de lungime şi orientarea spaţiului. Un asemenea vector este numit uneori *vector polar.* în fizică el apare sub numele de *vector moment* (al unei forţe, de pildă). în geometrie, el este folosit pentru a caracteriza direcţiile planelor prin direcţia sa, şi pentru a evalua arii plane prin măsura sa. El formează al 3-lea vector al unei baze ortonormale, cînd primii doi vectori unitari sînt daţi.

Fiind dată o dreaptă *D* definită printr-un punct *A* şi un vector director u, tangenta într-un punct *M* la cercul de axă *D* care trece prin M este orientată de

$$v = u \times AM.$$

Dacă *M* descrie un cerc cu o viteză unghiulară <o, plasăm pe *D,* alegînd un sens convenabil, un vector S2 de măsură şi viteza lui *M* este

$$V = A \times AM.$$

Această formulă este fundamentală în studiul mişcării unui corp solid.

III. Notaţia trigonometrică

Geometria tradiţională —numită şi geometrie „sintetică", în opoziţie cu geometria analitică care utilizează un sistem de coordonate — introduce încă de la început, nu numai lungimile ci şi unghiurile. Din punct de vedere istoric, faptul se explică, în etapa de început, prin aceea că privirea şi gesturile obişnuite ne dau intuiţia acestor obiecte, iar maitîrziu, în stadiul ştiinţific, prin nevoile astronomiei şi ale geodeziei,

discipline în care măsurarea unghiurilor este de importanţă primordială.

Din punctul de vedere pe care ne-am plasat noi — cel al spaţiului vectorial metric —obiectele care se asociază, în mod firesc, perechilor de vectori şi perechilor de direcţii, prin intermediul vectorilor lor directori, sînt produsul scalar şi cel vectorial. înainte de a introduce unghiurile în paragraful următor, să extindem la perechile de vectori oarecare definiţiile cosinusului şi sinusului introduse în § 1, II, *b* pentru vectorii unitari.

Fie doi vectori A = a • u şi B = *b* • v, cu *a* şi *b* pozitivi şi u şi v unitari. Introducem, prin definiţie:

cos (A, B) = cos (u, v) şi sin (A, B) = sin (u, v).

Introducem vectorul unitar u' perpendicular pe u şi coplanar- cu u şi v şi scriind v = au + £u', avem, prin definiţie,

cos (u, v) = a şi sin (u, v) = Ş.

Prin urmare:

$$\mathbf{u \bullet v = \cos(u, v),\ A \bullet B = ab \cos (A, B);}$$

|u A ▼! = | sin (u, v) | , |A A B| = *ab* | sin (A, B) |

Şi

$$\mathbf{[\cos (A, B)]^2 + [\sin (A, B)]^2 = 1}$$

dă

$$\mathbf{[A - B]^2 + [|A \text{ A } B|]^2 = a^2b^2.}$$

APLICAŢII

1) *Formula fundamentală a triunghiurilor*. Să ridicăm la pătrat (scalar) cei doi membri ai egalităţii vectoriale BC = AC — AB. Obţinem

$$\mathbf{BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2(AC \bullet AB)}$$

$$\mathbf{= AC^2 + AB^2 - 2AC \bullet AB \bullet \cos (AC,AB).}$$

2) *Formula fundamentală a triedrelor.* Fie u, v, w, vectorii care orientează cele trei muchii ale triedrului, şi u', u" vectorii unitari perpendiculari pe u respectiv în planele u, v şi u, w. Să facem, membru cu membru,

produsul scalar al egalităţilor v = au -|- -|- Şu' şi w = a'u + P'u".

Obţinem, remarcînd că u-u' =u-u" =0.

$$y.w = aa' + P|3' (u'-u"),$$

adică

cos(v, w) = cos(u, v) cos (u, w) + sin (u, v) sin(u, w) cos(u', u").

Să notăm, aşa cum se obişnuieşte, cu *a,b,c* feţele şi cu *A* unghiul plan (u', u'); formula se scrie

$$\cos a = \cos 6\text{-}\cos c + \sin fe\text{-}\sin c\text{-}\cos A.$$

§ 3. UNGHIURI

Revenim la § 1 şi introducem unghiurile independent de § 2 în care am studiat produsele de vectori.

I. Cosinusul şi sinusul unei perechi ordonate de vectori unitari

Considerăm vectori coplanari cu baza ortonormală (i, j). Fie un vector u şi vectorul lui direct perpendicular ▼, definiţi prin

$$u = ai + Şj,\ v = — pi + aj \qquad (1)$$

cu $a^2 + p^2 = 1$.

Fie w un vector unitar oarecare, coplanar cu cei precedenţi. Ne- amintim formula schimbării bazei:

$$w = au\ \text{-}|\text{-}\ 6v = (aa — Şi>)i + (Pa + at)j \qquad (2)$$

cu $a^2 + b^2 = 1$.

Prin definiţie, introducem (ca mai sus)

$$\{\ a = \text{cosinus } (u, w)$$

$$b = \text{sinus } (u, w)$$

sau, prescurtat

$$\{\ a\ \text{-}\ \cos (u,\ \ w)$$

$$b = \sin(u, w)$$

în particular,

$$\begin{cases} a = \cos(i,u) \\ \quad = \cos(i,w) \end{cases} \quad \begin{cases} \cdot \\ \cdot \end{cases} \quad \begin{cases} (aa - pi) \\ (pa + ai) \end{cases} \quad \begin{cases} P = \sin(u,w) \\ = \sin(i,w). \end{cases}$$

Sistem fundamental. Formula schimbării bazei dă

$$\begin{cases} \cos(i,w) = \cos(i,u)\cos(u,w) - \sin(i,u)\sin(u,w) \\ \sin(i,w) = \sin(i,u)\cos(u,w) - \cos(i,u)\sin(u,w) \end{cases}$$

V i, u, w coplanari, unitari.

Prin urmare, dacă planul este orientat, sinusul şi cosinusul unei perechi ordonate de vectori unitari sînt perfect determinaţi. Dacă se schimbă orientarea, cosinusul nu se schimbă, dar sinusul ia valoarea opusă (se schimbă j în —j).

CONSECINŢE IMEDIATE:

(1) Din (1) obţinem

$$\begin{cases} i = au - pv \\ j = pu + av \end{cases}$$

prin urmare

$$\cos(i, u) = \cos(u, i) = \cos(j, v) = \sin(i, v) = \sin(u, j)$$

$$\sin(i, u) = -\sin(u, i) = \sin(j, v) = -\cos(i, v) = \cos(u, j)$$

în particular,

$$\begin{cases} \cos(i, i) = 1 \\ \sin(i, i) = 0, \\ \cos(i, j) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(i, -i) = -1 \\ \sin(i, -i) = 0, \\ \sin(i, -j) = -1 \end{cases}$$

sin(i, j) =1, | cos (i, —j) = 0.

(2) Dacă au fost alese două numere *a* şi *b* care satisfac $a^2 + i^2 = 1$ dar în rest arbitrare, atunci oricărui vector unitar u îi corespunde, în planul orientat, un vector w bine determinat şi astfel încît cos (u, w) = *a,* sin (u, w) = *b* şi invers, oricărei perechi de vectori unitari (u, v), daţi în această ordine, îi corespunde perechea (a, *b)* care satisface $a^2 + 6^2 = 1$.

DEFINIŢIE. Vom spune că două perechi (u, v), (u_x, v_x) care corespund unei aceleiaşi perechi de numere *a, b* sînt *congruente.* Aceasta defineşte, evident, o relaţie de echivalenţă între perechile de vectori unitari. O vom extinde acum la perechile de vectori oarecare.

II. Congruenţa perechilor de vectori. Unghiuri

a) Numim *vector unitar director al unui vector* V, vectorul unitar v astfel încît V = *kv,* unde *k* este pozitiv. Aceasta înseamnă că |V|=fc.

Spunem că o pereche (V_1; V_2) de vectori oarecare este congruentă cu o altă pereche (Vj, V_2) dacă perechile lor de vectori unitari directori (v_x, v_2) şi (v_x, v_2) sînt congruente. Vom scrie

(V_{lt} V_2) = (V;, V_2).

în particular, toate perechile formate din doi vectori coliniari sînt congruente între ele.

Toate perechile astfel încît vectorul al doilea este direct perpendicular pe primul vector sînt congruente între ele.

Fiecare clasă de echivalenţă este caracterizată prin perechea de numere *a, b,* care sînt respectiv cosinusul şi sinusul perechilor de vectori unitari din clasa considerată. Aceste numere vor fi numite cosinusul şi sinusul acelei clase, precum şi cosinusul şi sinusul fiecărei perechi din acea clasă.

Fiecare clasă de echivalenţă se numeşte *unghiul perechii ordonate de vectori.* Unghiul perechilor

congruente cu (i, i) se numeşte *unghi nul,* iar cel al perechilor congruente cu (i, —i) se numeşte *unghi plat.*

b)* Adunarea unghiurilor. Vom defini acum între clase o operaţie internă pe care o vom numi *adunare.

Fie o clasă reprezentată prin perechea (V_x, V_2) şi o alta de reprezentant (Vi, Vi).

Plecînd de la un vector unitar, de exemplu i, să definim a Iţi doi vectori, unitari şi ei, prin

$$(i, v) = (V_{1;}\ V_2) \text{ şi } (v, w) = (Vi, Vi).$$

Sistemul fundamental (I) arată că, oricare ar fi i, perechea (i, w} este perfect determinată pînă la o echivalenţă. Ea defineşte clasa numită *clasa sumă* şi scriem

$$(i, w) = (V_n\ V_2) + (Vi, Vi).$$

în particular, (i, w) = (i, u) -f- (u, w) *(Formula lui Chasles).* Prin urmare, dacă notăm cu *C* şi *C'* două clase, sistemul (I) se scrie

j cos (C + *C')* = cos *C* cos *C'* —sin *C* sin *C'* I sin (C *C')* = sin *C* cos *C'* cos *C* sin *C'*

PROPRIETĂŢI ALE ADUNĂRII

(1) Există un *element neutru-,* clasa pe care am numit-o unghi nul.

Fiecărui unghi îi corespunde un *unghi opus,* fiindcă (U, V)-|-(V, U)= = (U, U). Unicitatea clasei opuse rezultă din (I'), folosind relaţiile

$$(\cos C)^2 + (\sin C)^2 = 1,\ (\cos C')^2 + (\sin C')^2 = 1$$

deoarece

J cos *(C* -|-C') =1 | cos *C* = cos *C'*

| sin *(C* -/- *C')* =0 | sin *C* = — sin *C'*

***Operaţia verifică axiomele* [A] din cap> 1.**

[Ai] rezultă din definiţie, [A_4] (comutativitatea) rezultă din formulele (I);

[A_3] rezultă imediat din formula lui Chasles:

(i,u) H-(ᵘ, v) +(v, w) = (i,v) +(v,w) = (i,u) +(u,w) =(i,w).

[J4₂] **se deduce din proprietăţile precedente şi din existenţa ele- mentului opus.**

Din cele precedente, se deduce *scăderea* — operaţia inversă adunării.

(2) Nu există însă posibilitatea de a stabili o corespondenţă biunivocă între mulţimea claselor şi mulţimea numerelor pozitive şi negative, din cauza următoarei proprietăţi:

***Unghiul plat este propriul său opus-* într-adevăr,**

$$(i, -i) +(-i, i) = (i, i).$$

ci Măsura unghiurilor. Vrem să atribuim claselor pe care le-am denumit unghiuri, numere pozitive, negative sau nule, în aşa fel îneît sumei a două clase să-i corespundă suma numerelor ataşate celor două clase. Vom reuşi să facem aceasta cu ajutorul următoarei leme:

1) BISECTOAREA UNEI PERECHI DE VECTORI. Fie V_x, V_2 vectorii daţi. Există o direcţie şi numai una singură (adică un vector unitar w şi opusul lui, —w, care face unghiuri opuse cu vectorii daţi:

$$(w, V_x) = - (w, V_2)$$

adică, după relaţia lui Chasles, $(V_x, w) + (V_2, w) = (Vi, V_2)$.

Dacă i orientează pe V_x şi j este direct perpendicular pe el,

$$V_2 = | V_2 | (ai + 6j), w = xi + yj$$

condiţia dă

$$\begin{matrix} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{matrix} \quad \text{cu} \quad \begin{matrix} (a^2 \text{-f-} b^2 = 1 \\ [x^2 + y^2 = 1, \end{matrix}$$

de unde

$$\begin{matrix} \text{j } 2x^2 = a + 1 \\ | \; 2xy = b \end{matrix}$$

care determină doi vectori opuşi.

Putem deosebi unul, w, din aceşti doi vectori, prin condiţia că *x* este pozitiv; atunci *y,* dacă nu este nul, are sigur semnul lui *b.* Dacă unghiul (V_x, V_2) este nul, acest vector w se confundă cu i. Numim vectorul w *vectorul bisector principal* al lui (V_x, V_2).

2) Putem oare atribui fiecărui unghi un număr prin condiţiile că unghiurilor opuse li se atribuie numere opuse, iar sumei unghiurilor i se atribuie un număr sumă?

Unghiului nul, care este elementul neutru al sumei unghiurilor, sîntem obligaţi să-i atribuim numărul 0. Să numim *p* numărul atribuit unghiului plat; acestui unghi trebuie însă să-i atribuim şi numărul — *p.* Dar atunci unghiului nul trebuie să-i atribuim şi numărul 2p, aşa că dacă unui unghi oarecare îi atribuim un număr 0, aceluiaşi unghi trebuie să-i atribuim şi numărul 0 + *2kp,* unde *k* este un întreg pozitiv sau negativ. Aşadar, *măsurarea unghiurilor nu se poate face decît cel mult pînă la un 2p.*

Vom lua pe *p* pozitiv şi vom atribui numărul +p/2 unghiului (i, j) cînd j este direct perpendicular pe i în planul orientat.

3) După teorema lui Chasles, este suficient să considerăm vectorii unitari u = ai + pentru care *a* şi *b* sînt pozitivi şi să atribuim perechilor (i, u) corespunzătoare, numere cuprinse între 0 Ş« .p/2-

Împărţim deci în două unghiul drept (i, j) prin vectorul lui bisector principal, apoi împărţim în două fiecare unghi obţinut şi aşa mai departe, atribuind, în fiecare etapă, unghiurilor congruente astfel obţinute numerele

$$\frac{p}{2} \quad \frac{P}{2^2} \quad \frac{P}{2^3} \quad \cdots$$

Fiecărui unghi dat (i, u) i se atribuie atunci o valoare, exactă sau aproximativă, de forma

$$\frac{p}{2}\left(\frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2^2} + \cdots + \frac{n_q}{2^q}\right)$$

unde numărătorii n_{lt} n_2-,.., n_q sînt 0 sau 1, şi invers, unui număr de acest tip îi corespunde un unghi (i, u). Dacă acceptăm să luăm întregul *q* suficient de mare, paranteza se poate apropia de orice număr cuprins între 0 şi 1, cu o aproximaţie oricît de bună vrem: într-adevăr, paranteza este de fapt un număr scris în sistemul de numeraţie cu baza 2, care are partea întreagă egală cu 0 şi *q* cifre la dreapta virgulei.

în felul acesta, după o trecere la limită *(q* -> oo), *atribuim fiecărui unghi considerat un număr* 9 *cuprins între* 0 *şi p/2, şi invers.* Scriem

o =(j, u).

Pentru un unghi oarecare, numărul cuprins între *—p* şi +p se numeşte *determinarea principală.* Celelalte determinări se deduc din ea adăugind un multiplu oarecare de 2p. Egalităţile referitoare la unghiuri sînt scrise deci pînă la un 2p; ele sînt în realitate *congruenţe* de modul *2p* (v. Cartea a Il-a, cap.l, § 2).

§ 4. LIMITE REFERITOARE LA FUNCŢIILE TRIGONOMETRICE. RADIAN. CALCULUL LUI *it*

I. Unghiuri şi coarde

1) într-o circumferinţă de rază 1, fie baza ortonormală

OA = i, OB = j,

apoi

(i, u) = <p, OC - U = *ai + bj,*

de unde

AC = u — i = (a — l)i + Jj

f a^2 + i^s = 1
(c^2 = *(a* -l)^2 + 6^2 =2(1 — a).

Să considerăm acum unghiul jumătate

~v), OD = V = *xi + yj.*

V este determinat de

$$1\ 2x^2 = a + 1$$
$$\text{l}\ 2xy - b,$$

de unde

$$x^2 = 1 - \frac{fi}{4}$$

$$\blacksquare\ AD^2 = c'^2 = 2(1 - x) = 2\ (1 -]/\text{l} - J) \qquad \text{(H)}$$

$$= 2 - \frac{}{1 + x} - \frac{}{2(1\ 4\text{-a-})} = \frac{}{2} .$$

Prin urmare, coarda *c'* care corespunde unghiului jumătate la centru verifică c'<c//2.

Or, unghiului p/2 îi corespunde coarda de lungime j/2; prin urmare, unghiului măsurat de (p/2) (p/2') îi va corespunde o coardă de lungime mai mică decît (l/j/^2)[5] \ Aşadar, *cînd unghiul tinde către zero, coarda tinde şi ea către zero în circumferinţa de rază unitate.*

în aceleaşi condiţii, după teorema lui Pitagora

$$(1 - a)^{\ddagger} + 6^2 = c^2,$$

numerele 1 —*a =1* —cos 9 şi *b* = sin 9 tind şi ele către zero, aşa că

***funcţiile* cos 9 *şi* sin 9 *sînt continue în vecinătatea lui* 9=0. Formulele**

cos (0_O + 9) = cos 0_O cos 9 — sin 0_d sin 9 sin (0_o + 9) = sin 0_o cos 9 + cos 0_o sin 9 în care facem pe 9 să tindă către zero demonstrează *continuitatea funcţiilor* cos 0 *şi* sin 0 *pentru toate valorile lui* 9.

2) Pentru a obţine *derivata* funcţiilor cosinus şi sinus în raport cu unghiul, vom împărţi la 9 creşterile

$$\cos(0_O + 9) - \cos 0_d = \frac{\text{ct>8 - - - (— gin}^2\ 9) - \sin 0_O \sin 9}{1 + \cos 9}$$

$$\sin(0_O + 9) - \sin 0_o = \frac{\text{—}^{9in}\ \%\ (\text{—}_s i_n 8y) - \{-005\ 00\ 310\ 9.}{1 + \cos <p}$$

Cînd 9 tinde către zero, cos 9 tinde către 1, sin 9 tinde către O; problema se reduce deci la a găsi limita lui (sin 9)/9- (Admitem aici teoremele despre limite demonstrate în Cartea a IlI-a.)

însă în cercul de rază unitate, coarda corespunzătoare unghiului 9 care este astfel încît cos 9 = a şi sin 9 = *b* are o lungime *c* care, după formulele (I), verifică

--—:— care tinde către 1 cînd 9 tinde către 0. 14-a

$$c^2 = 2(1 - a) = 2\frac{}{1 + a}$$

c 1/ **prin urmare, -y =** ***în circumferinţa de rază unitate, raportul dintre coarda corespunzătoare unui unghi care tinde către zero şi sinusul acelui unghi tinde •către 1.***

Prin urmare, limita raportului (sin <p)/9 = 6/9 este aceeaşi ca cea a raportului c/<p.

Or, acest raport şi limita lui —dacă ea există — depind, evident, de numărul, arbitrar ales de noi şi pe care l-am numit *p,* atribuit unghiului plat, dar nu depinde de unitatea de lungime, fiindcă măsura lui *c* nu depinde de această unitate.

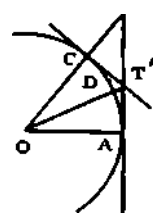
Vom arăta imediat că limita există şi este nenulă. *Vom putea alege atunci pe p în aşa fel încît această limită să fie egală cu* 1.

***Cu această alegere a lui p, derivata lui* cos 0 *este* — sin 9 *iar derivata lui* sin 0 *este* + cos 9.**

II. Limita raportului dintre lungimea *c* a coradei cercului de rază unitate şi măsura ? a unghiului la centru.

Trebuie să reluăm formula (II) $c'^2 = 2(1 - |/1 - c^2/4)$ şi să studiem corespondenţa pe care o stabileşte între unghiurile care sînt, succesiv, unul jumătatea celui precedent şi coardele corespunzătoare.

T



Să completăm figura formată din cele trei raze *OA, OC, OD* care determină unghiurile (OA, OC) =9 şi (OA,OD) = *<p[2* trasînd tangentele în *A* şi în *C* la circumferinţă. Ele se intersectează în *T' pe* prelungirea

lui *OD.* Am notat anterior *AC = c, AD = c'.* Să mai notăm, în plus, *AT'* = t'. Compararea oblicelor dă

$$-< c' < t' <$$
$$2\ 2$$

prin urmare, continuînd împărţirea în două a unghiurilor:

c < 2c' < *2?c"* < < ... < 2^n«^{n}> < ... <2^2t"< 2t' < *t.*

Să împărţim toţi membrii cu 9 =2" <p<$^{n)}$

$$\frac{c}{\varphi} < \frac{c'}{\varphi'} < \ldots < \frac{c^{(n)}}{\varphi^{(n)}} < \ldots < \frac{t^{(n)}}{\varphi^{(n)}} < \ldots < \frac{t'}{\varphi'} < \frac{t}{\varphi}.$$

Prin urmare c(^{n}>/<p($^{n'}$ are o limită X cînd *n* tinde către infinit (cap .2, § III).

De cine depinde X? Evident, de numărul *p* ales drept măsură a unghiului plat. X nu depinde de unitatea de lungime, fiindcă lucrăm în cercul de rază unitate. In fine, X nu depinde de unghiul <p ales la început fiindcă c, funcţie continuă de cos 9, este funcţie continuă de 9, aşa că limita X, care nu este aha decît derivata lui *c* în raport cu 9 pentru *<p* = 0, nu poate avea mai multe valori. Aşadar, raportul X/p este o constantă absolută, un număr bine determinat al geometriei metrice. II numim 1/тс **aşa că 71 *este măsura care trebuie atribuită unghiului plat pentru ca limita* X *a coardei cercului de rază unitate către unghiul la centru, cînd acesta din urmă tinde către zero, să fie egală cu* 1.**

Unitatea de ungbi astfel determinată se numeşte *radian.* După 2), *cînd unghiul* 0 *este exprimat în radiani,* cos 9 *şi* sin 9 *au ca derivate pe* — sin 0 *şi respectiv pe* + cos 9.

III. Calculul aproximativ al numărului *тz.*

Folosim formula (II). Obţinem valori ale lui c<$^{n)}$/<p<$^{n)}$, prin urmare — valori care aproximează prin lipsă numărul *тz.*

CALCUL CARE PLEACĂ DE LA VALORI APROXIMATIVE ALE LUI re

<P = TU/3 —	*c* = 1	3
9′ = TU/3 1/2	*c′* =1/2 -j/3	3-21/2 -f3
T „ ~ 3 1/22	*c″* = j/2 -1/2 +^3	3-2^2 —1/2
9 = ′ 1 ------/3 —/2 3	*c*^{m} = |^2 —*J/2* +1/2 +f3	3-2^2 —V 2 +1/2 +V3

Legea succesiune reiese clar.

CALCULUL CARE PLEACĂ DE VALORI APROXIMATIVE ALE LUI *TZ*

7T

2|<2

7T

2^2 ***c'*** **= ^2 -V2 22]/2 -K2**

= 1^2 —1/2 +/2 ***2^2*** **—1/2 +/2**

t 7T

t ₂a ***ti*** **= \|[** ***2*** **—** ***2*** **+1/2 +\|/'2**

2^2 **-^2 +1/2 +/2**

7T

₂4 ***c'***

Obţinem astfel

$$iz = \lim_{n\to\infty} 2^n f\ 2 - V2 + 1/2 + \dots \simeq$$

(în total *n* radicali)

ALT CALCUL AL NUMĂRULUI *TZ*

înainte de a împărţi la <p<ⁿ> = <p/2ⁿ, folosim formulele trigonometrice pentru a exprima pe

$_c$(ⁿ> = 2 sin (<p/2ⁿ)

in © = 2 sin— <P

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos}$$

cos —

= 2^2sin — cos — cos —

$$\text{co}\ \frac{\varphi}{2^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\varphi}}$$

₂2 **2 2^2**

ⁿ ·©op **o**

= 2^nsin—eos-cos

—.. .cos— 2n 2 2^2 9

cos — =

$_2$n

|/ 4+4]/M - +4FF4^

(n radicali)

Prin urmare

$$2^{n}\sin\varphi = 2^{n-1}\sin 2\varphi = 2^{n-2}\sin 4\varphi = \dots = 2\sin 2^{n-1}\varphi = \sin\varphi$$

$$\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^{2}}\cdots\cos\frac{\varphi}{2^{n}}$$

Făcînd $\varphi = \pi/2$, $\cos\varphi = 0$, obţinem aşadar

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}}}\right]$$

unde produsul are *n* factori, iar factorul numărul *k* are *k* radicali.. [După H. Lebesgue, formula aceasta se datorează lui VlfîTE (1540-1603).]

Formulele precedente nu sînt prea adecvate pentru calculul aproximativ al lui 7t. Fără a insista asura problemei, semnalăm remarcabila formulă a lui WALLIS (1616—1703):

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2}}{1\cdot3}\cdot\frac{4^{2}}{3\cdot5}\cdots\frac{(2n)^{2}}{(2n-1)(2n+1)} \qquad (1)$$

şi cea a prietenului acestuia, Lord BROUNCKER (1620—1684):

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to\infty}\cfrac{1}{2+\cfrac{3^{2}}{2+\cfrac{5^{2}}{2+\cfrac{(2n-1)^{2}}{2}}}}$$

De remarcat varietatea formulelor de mai sus.

Se ştie că calculatoarele electronice moderne au permis să se obţină primele zece mii de zecimale ale acestui număr 7t 3,1415926... care nu numai că nu este raţional (LAMBERT, 1761), dar nu este nici algebric (LINDEMANN, 1882). Este deci un număr *transcendent.*

CAPITOLUL 6

ALGEBRA BOOLEANĂ PE MULŢIMI. MĂSURI. PROBABILITĂŢI

Vom relua, mai întîi, şi vom completa cele spuse la început, despre operaţiile pe mulţimi; după aceea vom introduce cîteva măsuri care pot fi atribuite mulţimilor.

§ 1. ALGEBRA MULŢIMILOR

Considerăm o mulţime *E,* pe care o numim *mulţime de referinţă,* şi submulţimile ei *A, B, ...* Am definit deja *relaţia de incluziune*

***ÂCB^* [Va, a G A a G fi]**

Incluziunea este strictă, *A* Q *B,* dacă unele elemente care aparţin lui *B* nu aparţin şi lui *A.* Mulţimea acestor elemente se notează deseori cu *B —A.*

în mulţimea â a submulţimilor lui *E* se introduc trei operaţii interne:

a) *Intersecţia A* D fi *(„A* intersectat cu *B")* este mulţimea elementelor care aparţin simultan lui *A* şi lui *B.*

b) *Reuniunea A* U fi („A reunit cu *B")* este mulţimea elementelor care aparţin *sau* lui A, *sau* lui *B, sau* ambelor mulţimi *(sau* neexclusiv).

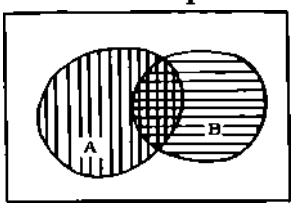
c) *Complementara* CA este mulţimea elementelor mulţimii *E* care nu aparţin lui A. Deseori ea se notează cu *A'.* Putem defini, de asemenea, complementara lui A

în raport cu o submulţime fi în care A este inclusă (A c fi) ca fiind mulţimea elementelor lui

d) *B* care nu sînt în *A*; ea se notează C_BA, dar nu constituie o operaţie nouă, fiindcă $C_BA = A' D B$.

Pentru ca operaţia de intersecţie să fie totdeauna posibilă, sîntem ■conduşi să introducem printre mulţimile lui S, şi mulţmiea vidă *0* .

De remarcat că trecînd de la un element la o submulţime sau la *E* şi apoi, în continuare, la â, se urcă în scara tipurilor (fapt indicat de semnul de apartenenţă £). Din contră, relaţia c ?i •operaţiile D şi U conservă tipul.



Proprietăţi ale operaţiilor. Exemple simple (mulţimi de obiecte, de puncte) ne conduc la proprietăţi care constituie axiomele teoriei. Aceste proprietăţi *se văd* pe o schemă numită *diagrama lui Euler:* fiecare submulţime este reprezentată prin mulţimea punctelor interioare unei linii închise simple (adică fără puncte multiple) din plan: *A* este reprezentată de interiorul unei asemenea linii, iar A'de exteriorul ei. *A* D *B* este partea haşurată dublu iar *A* U *B* este regiunea care n-a rămas albă. Se vede fără dificultate care sînt regiunile care reprezintă

(A u *BY,* C_A(A n B), C_B(A n B).

Să luăm ca axiome proprietăţile următoare:

Intersecţia

(1) **A n A = A**

(2) A **n** B = B **n** A

(3) **An (Bn *C) =(Af}B)OC*

(1) şi (1'): ***Idempotenţă***

(2) şi (2'): ***Comutativitate***

Reuniunea

(1') **A U A = A**

(2') **A U B = B U A**

(3') **A U (B U *C)* = (A U B)**

(4) şi (4'): ***Dublă distributivitate***

(4) ***A* n (B u C) = (A CI *B)* U (A n C)**

(4') ***A* u(B CI *C)* = (A u *B)* n (A u *C).***

Ştim (cap.l) sădeducem din aceste formule comutativitatea^ asociativitatea, distributivitatea, pentru un număr dat, oarecare de termeni. însă pînă acum nimic nu deosebeşte una de alta cele două operaţii —reuniunea şi intersecţia; deosebirea apare cînd introducem mulţimea *E* şi mulţimea vidă prin axiomele: VA £ â

(5) ***A* U *E* = *E***

si

(6) *A* **n 0 = 0.**

în fine, definiţia complementarităţii este

(7) ***A* U *A'* =*E***

cu

(8) ***A* n *A'* = 0.**

Spunem că *A* şi B sînt *disjuncte* dacă *A* CI B = 0 .

Teoria elaborată pornind de la aceste axiome se numeşte *Algebra booleana* pe mulţimi. Dar nu putem oare demonstra aceste egalităţi? Să studiem, de

exemplu, egalitatea (4): primul membru este- constituit din elementele lui *E* care aparţin lui *A şi* lui B sau lui *C* sau ambelor submulţimi B şi C; dar aceste elemente sînt tocmai cele care aparţin lui *A şi* lui B, *sau* lui *A şi* lui *C,* unde *sau* este neexclusiv. Această demonstraţie presupune că s-a codificat folosirea cuvintelor *şi, sau.* Să remarcăm că sau exclusiv se traduce prin (A'f)B) U (A A B'). Adăugînd şi negaţia necesară pentru introducerea complementarei, obţinem logica clasică, aşa că egalităţile scrise nu sînt altceva decît o codificare a acestei logici. Ne dăm atunci seama că există posibilitatea creării unui calcul logic accesibil, de pildă, calculatoarelor electronice.

Demonstrarea unei egalităţi. Prin definiţie, două submulţimi sînt egale dacă au aceleaşi elemente, dar noi trebuie să caracterizăm

«galitatea printr-o condiţie referitoare la operaţiile A şi

U • Intro •ducem o axiomă suplimentară, de exemplu

l) X U Y = X A Y =^> X = Y

***Remarcă:* operaţiile nu sînt simplificabile.**

Nici *A* U X = *A* U Y, nici *A* A X = *A* A Y nu implică X = Y.

FORMULE FUNDAMENTALE (în alte expuneri, aceste formule pot servi drept axiome)

(5') *A* A *E = A*

HAftEjftA = AftE

fnndca ţ $_{(4n£)(Jyl =}$ $(4_{U4)n}{}^{\wedge}{}_{U£)}$ $_{= A n E}$ **pe baza axiomelor**

(6') *A* U 13 *= A.* Demonstraţie analoagă, folosind 3'), 1'), 1), 5').

***Legea absorbţiei.* Fie X = *A* A (A U *B)* şi Y = *A* U (A A B). Pe baza relaţiilor 4) şi 1) se obţine:**

X = (A A A) U (A A *B)* = A U (A A *B)* = Y.

■Or, rezultă imediat:

(X A A = X
> , prin urmare *X = Y = A,*.
| *Y U A = Y*

De unde, formula

9) VB, A A (A U B) *= A* U (A A B) = A.

LEGEA COMPLEMENTARITĂŢII *Remarcă preliminară.*

(II)

$$\begin{cases} X' U Y = -E \\ X' A Y = 0 \end{cases}$$

într-adevăr, (II) permite să se scrie, pe baza relaţiilor (5') şi (6') j *x* u *y = (X* u Y) n (X' u Y) = *(X* n Y) ∪ Y = Y

(x n y = (X n Y) ∪ (X' n Y) = (x ∪ Y) n Y = Y

şi se aplică (I).

(10) *Simetria relaţiei de complementaritate.*

într-adevăr, notînd

[A' U Y = *E .* (II) dă ***A = Y.***
I 4' n ***Y= 0*** *şi*

Complementara unei ***complementara unei***

(A'y = A.

(A')' = Y, **obţinem, pe baza relaţiilor**

(11) *(A* U *B)' = A'* CI *B'* Se verifică (II) j *A* U *B* = X'

(11') (A O *By = A'* U *B'* înlocuind în ea] *A'* D *B'* = Y

Datorită asociativităţii, obţinem teorema generală:

***Complementara unei expresii booleene se obţine înlocuind fiecare submulţime cu complementara ei şi intervertind semnele* U *şi* D .**

5) FORMA CANONICĂ. Existenţa unei forme canonice unice pentru toate expresiile egale prezintă o importanţă teoretică, fiindcă ea permite să se recunoască dacă două expresii booleene sînt sau nu egale, printr-o operaţie de identificare analoagă celei care este valabilă pentru polinoame.

a) **Orice expresie booleană cu *n* litere *A, B, ..., L* (care pot apare şi prin complementarele lor *A', B ..., L')* se poate scrie sub forma unei reuniuni de intersecţii, în care fiecare intersecţie conţine toate cele *n* litere cu sau fără accent; cu o singură excepţie,, care priveşte mulţimea vidă *0.***

De pildă, în cazul a 3 litere, este vorba de reuniunea

de termeni ACI BflC, *A* n *B'* n *c, A* O *B'* n *C'* etc. (8 termeni posibili).

Să demonstrăm posibilitatea de a scrie orice expresie sub o astfel de formă: eliminăm, mai întîi, toate parantezele accentuate cu ajutorul formulelor de complementaritate, iar după aceea eliminăm parantezele care cuprind reuniuni folosind formula (4). Nu rămîn atunci decît paranteze care cuprind intersecţii şi pe care le vom numi *termenii* reuniunii; expresia reprezintă un *polinom boolean.*

Mai rămîne însă să completăm termenii care nu conţin toate literele: dacă termenul se numeşte *T* şi dacă litera care trebuie introdusă este *K,* folosim formula *T* = (T D *K)* U (T P *K').* Expresia este scrisă atunci sub formă canonică.

EXEMPLU. Să se verifice că

$$[(A \cup B) \cap (A' \cup C)] \cup (A \cup B')' =$$
$$= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A^r \cap B \cap C) \cup (A' \cap B \cap C').$$

***b)* Rămîne să demonstrăm că dacă două expresii sînt egale, ele corespund uneia şi aceleiaşi forme canonice. Pentru concizie, dăm o demonstraţie intuitivă folosind diagrama lui Euler: submul- ţimile *A, B, ..., L* şi complementarele lor determină pe *E* o partiţie, fiecare din domeniile disjuncte obţinute fiind tocmai reprezentarea unuia din termenii formelor canonice formate cu ajutorul acestor litere. Dacă două expresii sînt egale, ele sînt reprezentate printr-un acelaşi domeniu, şi constituenţii acestuia reprezintă termenii formei canonice.**

6) INCLUZIUNEA. *A* C B se exprimă prin

$$A \subset B = A \text{ sau prin } A \cup B = B$$

formule care sînt echivalente, conform legii absorbţiei.

EXEMPLU DE APLICAŢIE. Să se demonstreze că dacă *P' = CP*

VP, A n B c ***(A*** n ***P)*** u (B n P').

Ştim că această incluziune este echivalentă cu

(A n B) n [(A n P) u (Bn P')] = A n B;

or, cei doi membri au aceeaşi formă canonică

(A n Bn P) u (A n B n P').

Completînd relaţia cu o incluziune evidentă, conchidem

VP, A n B C (A n P) U (B n P') C A u B

o incluziune dublă care se dovedeşte deseori foarte utilă.

Teorema unicităţii formei canonice serveşte la explicitarea şi lămurirea unor situaţii exprimate sub o formă complicată, în special, în statistică.

EXEMPLU. O serie de bile, unele albe (mulţimea A), altele de alte culori, sînt, unele de sticlă (mulţimea S), altele din diferite alte materiale. Unele sînt într-un coş (mulţimea C), altele nu. Să explicităm fraza: „să se extragă bilele albe de sticlă dintre cele care au rămas după ce au fost extrase cele albe care nu erau în coş". Traducem: trebuie luat A CI S A (4 D C')', ceea ce dă, după simplificare, *A* 0 S 0 *C.* Trebuie deci extrase bilele albe de sticlă care sînt în coş.

Algebra mulţimilor ne va fi deosebit de utilă cînd vom înzestra submulţimile cu o măsură.

§ 2. MĂSURI

I. Definiţii

Spunem că în familia *9* de submulţimi ale lui £, închisă în raport cu intersecţia şi reuniunea s-a introdus o *măsură* dacă:

a) **Fiecărei submulţimi i s-a ataşat un număr real pozitiv sau nul.**

p) Reuniunii a două submulţimi disjuncte i s-a ataşat un număr egal cu suma numerelor ataşate fiecărui termen al reuniunii. în particular, mulţimii vide i s-a ataşat numărul zero, fiindcă altfel n-ar exista unicitate, deoarece mulţimea vidă este elementul neutru al reuniunii.

Pentru a permite trecerea la limită, punctul Ş) trebuie extins nu numai la un număr finit de submulţimi, ci şi la o mulţime infinită numărabilă de submulţimi.

Consecinţă. Măsura unei submulţimi (din gQ exprimate sub formă canonică este egală cu suma măsurilor termenilor acestui polinom boolean, fiindcă aceşti termeni sînt mulţimi disjuncte două cîte două. Aceasta permite să se calculezemăsura uneireuniuni; de exemplu, în cazul a doi termeni:

***A* U *B* = (A fi *B)* U (A CI *B')* U (A' CI B),**

A = (A CI B) U (A D *B'}* şi *B* = (A D *B)* U (A' CI *B)*

De unde măs (A U B) = măs A -f- măs B —măs (A CI B).

Tot astfel găsim

măs (A U *B* U *C)* = măs *A* -f- măs *B* + măs *C* — măs (A A *B)* —

— măs *(B Ci C)* — măs (C A A) + măs (A ABAC).

Asemenea formule stau Ia baza calculului probabilităţilor pe ■care îl vom introduce în § 3.

Axiomele a) şi [3) sînt verificate în numeroase cazuri. Sînt multe şi diferite punctele de vedere din care se atribuie numere unor mulţimi, de unde — diferite tipuri de măsuri. Pe cele mai simple le vom introduce în continuarea acestui paragraf.

Cînd este vorba de mulţimi cu un număr finit de elemente, acest număr este *măsura naturală* a mulţimii: este un întreg natural care, evident satisface cele două axiome. Lucrurile nu mai stau însă aşa -cînd se ataşează un număr cardinal unor mulţimi infinite: am pomenit ceva despre mulţimile zise *numărabile*; or, reuniunea a •două mulţimi numărabile este şi ea numărabilă, aşa că numărul cardinal nu constituie cu adevărat o măsură. Vom reveni la sfîrşitul Cărţii a Il-a asupra acestor chestiuni care sînt fundamentale pentru un studiu cuprinzător al măsurii, fiindcă aceasta interesează mai ales în cazul mulţimilor cu un număr infinit de elemente.

Trebuie să introducem *măsurile geometrice* (sau *naturale)* ataşate submulţimilor celor mai simple ale spaţiului (lungimi, arii,volume), precum şi aşa-numitele (în fizică) *cantităţi* (cantitate de căldură, cantitate de electricitate etc., conţinute într-o regiune), pe care însă noi le vom numi *mase,* indiferent că este sau nu vorba de mase fizice. Primele (măsurile geometrice) sînt atribuite domeniilor înseşi, celelalte se referă, în plus, la o funcţie definită în fiecare element al domeniului şi pe care, în cazurile simple, o vom numi *densitate în fiecare punct* (terminologie în acord cu cuvîntul ,,masă“).

II. Măsură naturală pe dreapta reală

Dreapta reală este mulţimea punctelor *M* definite, odată alese originea *O,* sensul pozitiv şi vectorul unitate u, prin

$$x \in B, \quad OM = xu.$$

1) Fiecărui *interval* deschis *]a,* 6[îi ataşăm numărul

$$\text{măs}\,(a, b) = |b - a|,$$

iar intervalului închis redus la un singur punct îi

atribuim numărul zero, măs *[a, a]* =0, ceea ce face inutilă precizarea: interval deschis sau închis. Numărul astfel introdus este *lungimea* intervalului.

Pentru familia intervalelor, acest număr verifică, evident, axiomele:

a) *este un număr pozitiv sau nul:*

P) *măsura unei reuniuni de mulţimi disjuncte este suma măsurilor termenilor.* Lucrul acesta trebuie subînţeles nu numai în cazul unui număr finit de termeni, ci şi pentru *o infinitate numărabilă* ■*de termeni.* Prin urmare, familia *9* de submulţimi este aici mulţimea reuniunilor unui număr finit sau numărabil de intervale.

O proprietate esenţială a măsurii astfel introduse pentru elementele lui *9* este *invarianta la translaţie* (PROPRIETATEA y). în plus, o omotetie de raport *k* multiplică măsura cu | *k* /.

Consecinţe. Măsura intervalului (a, oo) este infinită; *acceptăm să includem* -|- oo *în mulţimea măsurilor.*

***Măsura unei mulţimi numărabile de puncte este nulă.* Nu trebuie însă să se creadă că faptul acesta caracterizează o mulţime numărabilă. într-adevăr, se poate da un exemplu (mulţimea triadică ■a lui Cantor) de mulţime de puncte pe intervalul (0,1) care nu este numărabilă şi totuşi nu conţine nici un interval (Cartea a Il-a, cap.3, § 1). Aşadar, chiar limitîndu-ne la dreapta reală, formularea noţiunii generale de măsură prezintă mari dificultăţi. Noi ne vom mărgini să introducem măsura numită *măsură Lebesgue* pentru anumite mulţimi.**

2) Folosind faptul că relaţia de incluziune este o relaţie de ■ordine, vom extinde acum familia domeniilor măsurabile prin procedeul următor:

Fiind dată o submulţime *A* a dreptei reale, fie 5C mulţimeasub- mulţimilor H_{it} înzestrate deja cu măsuri, care acoperă pe A, şi 3C mulţimea submulţimilor *Kj,* înzestrate cu măsuri şi incluse în *A,* adică

Vi, Vj, K_i C *A* C H_t

Avem

măs **i* < măs ^{H}*i-*

Dacă *A* poate avea o măsură, acea măsură trebuie, evident, definită în aşa fel încît

Vi, V/, măs *Kj* măs *A* măs H_i.

Or, noi ştim, pe baza axiomei de completitudine a numerelor reale, că mulţimea numerelor (măs are o margine inferioară *h* = Inf (măs fiindcă această mulţime este minorată de fiecare din numerele (măs K_j); tot astfel, mulţimea numerelor (măs K_j) are o margine superioară *k* = Sup (măs *Kf),* cu *k h. Dacă A este astfel încît k = h, atribuim lui A acest număr.* într-adevăr, conform proprietăţilor limitelor,acest număr satisface, evident, axiomele a) şi P).

în particular, dacă *B* şi *C* sînt măsurabile şi *C* este inclus în *B,* mulţimea *A = B — C =* CBC va fi măsurabilă şi va avea măsura

măs *A* = măs *B* — măs *C.*

III. Măsuri în spaţiul cu două dimensiuni

în raport cu baza (u, v) şi cu originea *O,* un punct *M* este definit prin

OM - a:u *yv.*

A) Măsuri naturale in geometria afină

1) *Paralelogramului U* {0 < *x* < 1, 0 < *y* < 1} i se atribuie numărul 1.

Unui segment *{a<x<b, y = c},* sau unuia (x = *a, b<y<Zc}* îi atribuim numărul 0; de aceea, nu va fi nevoie să facem deosebire între paralelograme închise şi deschise. (în cadrul unei axiomatici mai subtile aceasta ar constitui o teoremă.)

Păstrăm axiomele a), P) şi axioma y) *a invarinaţiei la translaţie.* în felul acesta, obţinem măsura *oricărui paralelogram P_1 cu laturile paralele cu baza,* (a < *x* < *a* + *q,, b* < *y* < *b* + *q'}, unde q* şi *q' sînt numere raţionale.* într-adevăr, dacă *q* = p/n şi *q' = p'/n', U* conţine n^2 paralelograme mici, iar Pj conţine *pp'* asemenea

paralelograme care se deduc, toate, unele din altele, prin translaţie, fără a socoti segmentele frontieră de măsură nulă. Prin urmare, măs $P_Y = qq'$.

Pentru a extinde familia domeniilor măsurabile, procedăm aşa cum am făcut în cazul unei dimensiuni: Fiind dată o submul- ţime *A* a planului, considerăm mulţimea 3C a tuturor reuniunilor *Hi* de paralelograme Pj care formează o acoperire a lui *A* şi

mulţimea 3C a tuturor reuniunilor *Kj* de paralelograme *Pj* disjuncte care sînt incluse în *A.* Dacă Inf = Sup *K„* atribuim acest număr lui *A.* Iată cîteva domenii care, prin acest procedeu, au devenit măsurabile:

a) **PARALELOGRAME OARECARE CU LATURILE PARALELE CU BAZA. Fie P₂ {a < *x* < *a* + *r, b* < *y* < *b* + r'}, unde *r* şi *r'* sînt numere reale pozitive oarecare. Pentru a alege mulţimi *Hi* şi *Kj,* considerăm valorile raţionale aproximative ale lui *r* şi *r' Pn* _■ *Pn* + 1 _ în**

$n — — * ˢn — n Şl tn — în + 1 9 tn — n f

determinate pentru orice valoare a lui n prin r < *In < r' < t'n,* şi luăm *Hn:*

{a < x < a + s'n, b < y < b + tn}

şi *Kn:*

(a < x < sn, b < y < tn}.

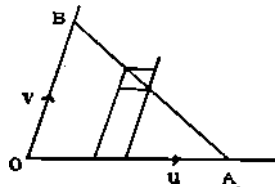
Avem

măs *Hn* — măs Pn + în + 1 (înf + I) *Pn'In*

M £ n² (— n) n

care tinde către 0 cînd *n* creşte nelimitat; prin urmare *P₂* este măsurabil şi
măs *P* = Inf (măs //₄) = Sup (măs *Kj)* - lim (măs *Kn) = rr'.*

b) **TRIUNGHIURI Tₓ CU DOUĂ LATURI PARALELE CU BAZA. Fie triunghiul *OAB,* cu OA = au şi OB = 6v. Latura *AB* are ecuaţia *y* = — — (*x* —a). Vom presupune că *a* şi *b* sînt pozitivi. *a***



Fiecărui întreg *n* îi asociem o diviziune a lui OA în *n* părţi egale de lungime *a/n.* Fiecare din aceste segmente

$$\frac{P}{a\text{-----}a} \qquad P \sim {}^{1}$$

$$a\text{----------}a$$

este luat ca bază a 2 paralelograme de tip P_2, dintre care unu) are a doua latură de lungime *pbjn,* iar celălalt — de lungime, *(p* —l)t/n. Reuniunea primelor paralelograme furnizează pe H_n iar reuniunea celorlalte pe K_n. Or,

măs H_n = —- (1 **4-2** 4- ... + ***p*** + ••• 4* ^{n}) = — **(1** H

$$n^* \qquad 2 \mid \qquad n\,j$$

măs K_n = $^{a}\pm$ [1 4- 2 4- 4- ($_{P}$ - 1) 4- - + ***(n*** - 1)] =

$$= \frac{ab}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

a căror **limită comună, cînd *n* tinde către infinit, este afr/2. Prin urmare**

Inf (măs H_t) = Sup (măs *Kj) =* •

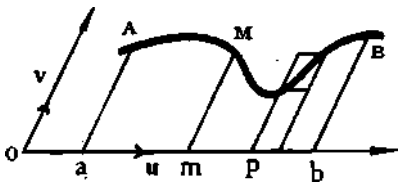
Aceasta este măsura triunghiului.

***c)*POLIGON OARECARE ŞI, ÎN PARTICULAR, TRIUNGHI OARECARE. Ducînd prin vîrfuri paralele la vectorii bazei, considerăm poligonul reuniune a unui număr finit de triunghiuri T_i; prin urmare el este măsurabil.**

Aceste măsuri sînt invariante la translaţie şi se multiplică cu un factor k^2 dacă domeniului i se aplică o omotetie de raport *k.* Ele nu sînt definite decît relativ la baza aleasă.

d)*EXTENSIA LA ALTE DOMENII (punctul de vedere a) integralei Riemann). Pornind de la baza aleasă, considerăm *graficul AB al unei funcţii pozitive,

continue **pe intervalul (a, *b).* Ştim că o asemenea funcţie este aproximată în (a, *b)* prin funcţii în scară: oricare ar fi e pozitiv arbitrar ales, există un întreg *n* astfel încît, împărţind intervalul (a, *b)* în *n* părţi egale, valoarea lui *y* în segmentul *{x*$_p$*,* ^$_{p+1}$**) rămîne cuprinsă între două valori**



***h*$_p$ şi *k*$_p$ ale lui *y,* cu *k*$_p$ — *h*$_p$< *s.* în felul acesta, domeniu) D(aABfr) este aproximat prin reuniuni *H*$_n$ de paralelograme de măsură P~ *h*$_p$ şi prin reuniuni *K*$_n$ de paralelograme de măsuri —j/f$_p$. ^^{r}> ^{m}®^{s} — măs *Kn*< (&— ^{a})$^£$ tinde către 0 odată cu s. Prin urmare, Inf (măs *H*$_t$*)* = Sup (măs *Kj)* şi domeniul are o măsură.**

Evaluarea acestei măsuri **plecînd de la funcţia dată *y = f(x')* presupusă pozitivă.**

Pentru a putea utiliza datele care definesc domeniul, acesta trebuie considerat drept o funcţie de abscisa *b;* altfel spus, vom considera domeniul *D(x)* de bază *am,* limitat de paralelele *aA* şi *mM* la vectorul v. Am văzut mai sus că *D(x~)* are o măsură p.(a;) şi că aceasta verifică, într-o vecinătate a lui *x,*

| A# | • Inf *y* < | A[x(a:) | < |A#|• Sup *y,*

unde marginile Inf *y* şi Sup *y* sînt luate relativ la intervalul A#; însă măs *D(x)* este funcţie crescătoare dea;, prin urmare, ţinînd seama de semne,

Inf»/ < Sup»/.

â.i-

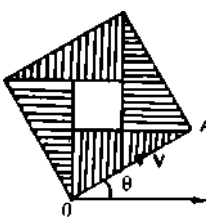
Cînd Aa: tinde către 0, primul şi al treilea membru tind către *f(x);* prin urmare, *y(x)* = măs *D(x) admite o derivată care este f(x).*

Am demonstrat aşadar că o funcţie *f(x)* pozitivă şi continuă pe un interval (a, *b)* este derivata unei funcţii *F(x);* rezultă deci (v. Cartea a IlI-a, cap.5) că ea este derivata unei infinităţi de funcţii <D(a;) = *F(x') + C,* unde *C* este o constantă arbitrară. <I>(a:) se numeşte *primitiva generală* a lui *f(x). F(x)* este o *primitivă particulară* obţinută alegînd valoarea lui *C.* Cît despre măs *D(x),* aceasta este acea primitivă particulară care este nulă pentru *x = a,* ceea ce determină constanta *C.* Ea este deci *G>(x)* — 3>(a) = = *F(x)* —*Fia);* pentru a o desemna, se foloseşte deseori notaţia âj/'. (Nu este altceva decît integrala definită a lui Riemann, care, în teoria integralei, se notează^

Calculul măsurilor introduse se reduce deci la calculul invers calculului derivatelor: calculul primitivelor (sau al integralelor nedefinite, noţiune care corespunde primitivei generale). (Cartea a IlI-a, cap.6.)

B) Aplicaţii în geometria metrică

1) Arii plane. Măsura precedentă depinde, aşa cum am mai spus, de baza spaţiului vectorial. Noţiunea de arie, de origine fizică, este, din contră, intrinsecă. Ea este definită în *spaţiul metric* notat R^2. Presupunem deci că s-a ales o *bază ortonormală* şi va trebui să demonstrăm că măsura definită mai sus nu depinde de această bază, altfel spus, că *măsura este invariantă cînd domeniului i se aplică o deplasare.*



Este suficient să facem demonstraţia pentru pătratul

de latură unitate, a cărui latură *OA* face un unghi 0 cu u. Am putea face calcule, însă este mai simplu să observăm că paralelele la u şi la v duse prin vîrfuri descompun pătratul în 4 triunghiuri de măsură -- cos 0 sin 0 şi un pătrat de măsură (cos 0 — sin 0)^2; prin urmare, măsura pătratului (măsură despre care ştim că există) este

$$2 \cos 9 \sin 0 + (\cos 0 - \sin 0)^2 = 1.$$

■ Aşadar, măsura definită în spaţiul vectorial metric cu două dimensiuni (notat R^2) este aceeaşi, oricare ar fi baza ortonormală la care s-ar referi, firește — dacă s-a păstrat unitatea de lungime; ea este *aria* domeniului. Orice domeniu poligonal, orice domeniu convex a cărui frontieră este formată dintr-un număr finit de arce care sînt grafice de funcţii continue pentru baze convenabil alese, are o arie pe care ştim s-o evaluăm dacă ştim să calculăm primitivele. (Există firește, şi domenii neconvexe care au o arie, dacă ele pot fi definite prin intersecţii simple.)

EXEMPLE. Ştim să calculăm aria *ObB* delimitată de *parabola*

$y = ax^2$, fiindcă $S\hat{}ax^2 = \frac{1}{3} axA$. Prin urmare, aria $ObB = \frac{1}{3} Ob \cdot bB$.

însă pentru aria *cercului,* ar trebui să cunoaştem primitiva generală a funcţiei $|//î^2 - x^2$, ceea ce nu este foarte simplu de obţinut. Va trebui deci să revenim la mulţimile H_i şi *Kj.* Deoarece ştim că aria există, vom lua, de exemplu, drept *H,* şi *Kj* poligoanele regulate circumscrise şi înscrise cu *n* laturi. Ariile lor sînt respectiv

$$2nR^2 \sin \frac{-\hat{i}-}{2n\ 7r}$$

$$\cos - \text{şi} \qquad ^{2"}$$

$$\frac{2\pi R^2}{2n} \sin \frac{}{} \cos \frac{}{2n}$$

a căror limită comună este *r.R²,* fiindcă — _> 1 cînd *n* tinde

TT/2/I **către -f- oo.**

în felul acesta se pot obţine toate formulele elementare referitoare la ariile plane.

2) Masa unui segment de dreaptă. Densitate (luăm masa ca exemplu de *mărime).* Folosind balanţa, fizica măsoară masa tijelor, tije pe care noi le putem asimila cu nişte segmente de dreaptă. Fie un punct x_0 al acestui segment şi o vecinătate *V* a acestui punct. Cazul de care ne vom ocupa este cel în care raportul (masa lui F)/(lungimea lui V) tinde către o limită *f(x₀)* cînd lungimea vecinătăţii tinde către 0, unde /'(x) este o funcţie pozitivă, continuă de *x.* Masa segmentului (a, rr) este atunci primitiva *'îţf(x) ;* ea este, aşadar, aria domeniului plan limitată de graficul funcţiei *f(x).* Prin urmare, în cazul considerat, masele ataşate unui domeniu cu o dimensiune sînt arii ale unor domenii cu două dimensiuni. Din cele de mai sus, ne putem da seama încă de pe acum că masa unui domeniu plan relativă la o funcţie densitate *f(x, y)* va fi interpretată ca un volum.

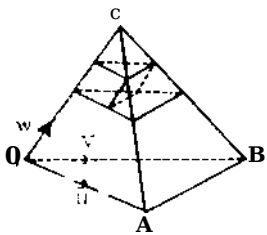
De reţinut însă că fizicianul introduce şi mase (sau măsuri) care nu corespund unor densităţi; astfel, măsura lui Dirac are valoarea 0 pentru orice domeniu care nu cuprinde un punct *A,* şi valoarea 1 pentru orice domeniu care cuprinde pe *A.* Aceasta este, şi ea, o măsură, în sensul că acest număr satisface axiomele a) şi P) [dar nu şi axioma *y)* a translaţiei!]. Pentru a putea trata matematic

asemenea situaţii a fost creată teoria distribuţiilor (Laurent SCHWARTZ).

Dacă densitatea are valoarea 1 în orice punct al unui segment, lungimea acestuia apare ca fiind tocmai masa lui.

IV. Măsuri în spaţiul cu trei dimensiuni

Folosim un procedeu analog. De data aceasta, atribuim valoarea 0 tuturor domeniilor măsurabile pe care una din coordonate rămîne constantă. In cursul analizei, înlocuim paralelogramele prin paralelipipede. Studiul care, în III, A, *b)* se referea la un



triunghi, se referă acum la un tetraedru ale cărui muchii *OA, OB, OC* sînt paralele cu vectorii bazei. Pentru a alege domeniile H_n şi K_n, este comod să împărţim latura *OC* de exemplu în *n* părţi egale şi să considerăm secţiunile paralele cu *OAB* duse prin punctele de diviziune, secţiuni care sînt triunghiuri ale căror măsuri plane se deduc prin omotetie din măsura lui *OAB.*

Suma care trebuie calculată este atunci

măs H_n = $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

expresie care, cînd *n* tinde către infinit, are ca limită rea $\frac{abc}{6}$

valoa-

Această măsură a tetraedrului reprezintă *volumul*

acestuia dacă, în spaţiul metric, baza relativ la care s-a atribuit măsura este ortonormală, şi acest volum este invariant la deplasare, aşa cum rezultă din expresia lui cu ajutorul unui produs mixt de vectori

$$\frac{1}{6}\ (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})\mathbf{w}$$

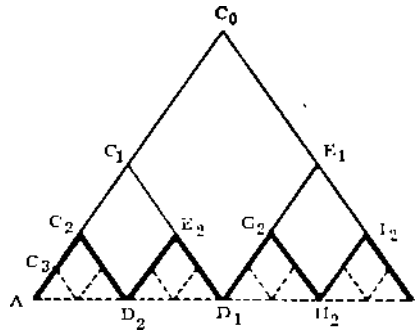
în cazul unui domeniu oarecare, dacă folosim secţiuni paralele cu planul *xOy* pentru a defini submulţimile H_i şi *Kj,* şi dacă aceste secţiuni au o arie d(s) —singurul caz de care ne ocupăm aici —volumul apare ca fiind primitiva ăjd(z).

Dacă se consideră prisme care au ca baze vecinătăţi ale punctelor *x, y* din planul bazei şi ca înălţimi cotele *z(x, y)* asociate punctelor, volumul apare ca fiind un nou obiect de analiză: este masa unui domeniu plan, funcţia *z(x, y)* fiind interpretată ca o densitate de suprafaţă. (El este integrala dublă a unei funcţii de două variabile, extinsă la un domeniu plan.)

Masa unui domeniu din spaţiul cu 3 dimensiuni se poate interpreta, în acelaşi spirit, ca fiind măsura unui domeniu din spaţiul cu 4 dimensiuni. (Integrala triplă a unei funcţii de 3 variabile, extinsă la un domeniu din spaţiu.)

V. Lungimile curbelor. Ariile suprafeţelor etrîmbe

Această nouă problemă pe care o introduce fizica este mai delicată decît cea precedentă fiindcă, dacă rămînem pe curbă sau pe suprafaţă, nu mai putem folosi translaţia, iar dacă considerăm curbe sau suprafeţe vecine, nu mai putem folosi o relaţie de ordine, în timp ce două domenii punctual vecine aveau arii sau volume vecine, acum lucrurile nu mai stau aşa: *o linie frîntă poate avea toate punctele foarte apropiate de punctele unei alte linii frînte, fără însă ca lor să li se poată atribui aceeaşi lungime* (limita liniilor *frînte AB* din figură, cînd numărul lor de laturi tinde către infinit este, ca poziţie, segmentul *AB,* dar lungimile lor rămîn egale cu lungimea a lui AC_0B). Aceeaşi dificultate în ceea ce priveşte suprafeţele strîmbe punctual vecine.



F2

Pentru a obţine o definiţie acceptabilă a lungimii unui arc *AB,* consideră toate liniile frînte *AB,* cu segmente rectilinii, care sînt astfel încît se poate stabili o corespondenţă biunivocă şi bi- continuă între punctele arcului şi punctele liniei frînte. Comparăm în aceste puncte direcţia laturii liniei frînte şi direcţia tangentei la curbă. Cînd numărul de laturi ale liniei frînte tinde către infinit, se demonstrează că, *dacă punctele asociate, precum şi direcţiile asociate sînt în vecinătăţi care tind către zero,* lungimile tuturor liniilor frînte au o aceeaşi limită; şi această limită este adoptată ca *lungime a curbei date.* De' reţinut că teorema cere nu numai ca curba să admită o tangentă în orice punct, dar şi ca această tangentă să varieze continuu ca direcţie, cînd punctul descrie curba.

In consecinţă, pentru a evalua lungimea unei curbe, cum ar fi un arc de circumferinţă, putem porni de la linii frînte înscrise în curbă, ale căror laturi au lungimi care tind către zero cînd numărul laturilor tinde către infinit; va fi verificată condiţia impusă direcţiei. In cazul circumferinţei se folosesc tocmai bazele triunghiurilor cu vîrful în centru care ne-au permis să calculăm suprafaţa:

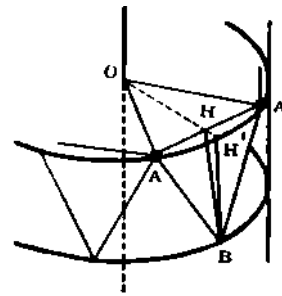
suprafaţa = lungimea X—.

Or, aria este7t7î², prin urmare lungimea este *"ITIR.*

Pentru a defini aria unei suprafeţe strîmbe, folosim

de asemenea suprafeţe vecine care sînt reuniuni de feţe plane. De data aceasta trebuie să impunem, pe lîngă *vecinătatea punctelor asociate* prin corespondenţă biunivocă, bicontinuă, *vecinătatea direcţiei planului fiecărei feţe şi a direcţiei planului tangent în punctul asociat* .Teorema referitoare la limită cere ca planul tangent la suprafaţă să varieze continuu cînd punctul de contact variază pe suprafaţă. Cînd se caută aria, nu este suficient să se ia o suprafaţă po- liedrală înscrisă ale cărei feţe tind, toate, către zero, fiindcă proprietatea aceasta nu este suficientă pentru a asigura satisfacerea condiţiei impuse direcţiilor feţelor. Aşa se şi explică unele paradoxuri cum este următorul:

Fie că se studiează suprafaţa laterală a unui cilindru de revoluţie de înălţime *h* şi rază *B.* Să considerăm cercurile secţiunilor cu plane paralele cu bazele, care împart înălţimea *h* în *p* părţi egale. în fiecare circumferinţă să înscriem un poligon regulat cu *n* laturi, decalînd însă vîrfurile cu un unghi — cînd trecem de *n*
la un cerc la altul. Aria unui triunghi (de pildă, ABA') este



$s = L\,AA' \cdot BH = R \cdot \frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{h^2}{p^2} + 4R^2 \sin^4\frac{\pi}{2n}}.$

Aria poligonală este deci

S = *2nps = 2R / n* sin Zţ) y^ + 4R* £ p sin* •

Cînd *n* şi *p* tind către infinit, feţele triunghiulare se apropie oricît de mult de suprafaţă. Totuşi, aria 5 nu are o limită decît dacă *p/n?* are o limită X, şi limita lui S depinde de X fiindcă

$$\lim 5 = 2R\,\hat{}\,h^2 + \hat{}|^2.$$

Singurul caz în care planul triunghiului *ABA'* face cu planul tangent asociat un unghi care tinde către zero este cel în care

$$BH' \to 0 \text{ deci} — \frac{p}{h} \sin\hat{} \to U,$$

aşadar, cazul în care *p/n*^{2} ->0. în acest caz, se obţine lim S = *= 2izRh,* care este rezultatul aşteptat.

Considerarea masei unei linii, sau a unei suprafeţe, corespunzătoare unei densităţi liniare sau unei densităţi superficiale, conduce la considerarea aşa-numitelor integrale curbilinii, respectiv a integralelor de suprafaţă.

Trebuie adăugat că matematicienii şi fizicienii operează şi cu spaţii vectoriale cu 4, cu n şi chiar cu o infinitate de dimensiuni! însă *măsura rămîne totdeauna o funcţie numerică a cărei variabilă este o submulţime a familiei §■ definite la început.*

§ 3. NOŢIUNI INTRODUCTIVE DE PROBABILITATE

Revenim la rezultatele din algebra mulţimilor (§ 1) şi, în particular, la noţiunea de formă canonică. Vom utiliza definiţia

generală a măsurii introdusă în § 2, I, precum şi formulele referitoare la măsurile intersecţiilor şi ale reuniunilor. Toate măsurile introduse sînt intrinsec pozitive.

I. Măsuri pe o mulţime de evenimente ***a)*** **EXEMPLU INTRODUCTIV**

Petre, Paul şi Ion joacă cărţi. In fiecare partidă, fiecare trage cîte o carte (roşie sau neagră). In decurs de 50 partide, Petre a tras de 35 ori roşu, Paul de 25 ori şi Ion de 28 ori. în 15 partide, Petre şi Paul au tras, amîndoi, roşu şi în 13 partide, Paul şi Ion au tras amîndoi, roşu. Ce se poate spune despre numărul de partide în care toţi trei jucătorii au tras cărţi de aceeaşi culoare?

Să notăm *A, B, C* mulţimile de partide în care respectiv Petre, sau Paul, sau Ion au tras roşu. Datele sînt

$$n = 50,\ \text{măs}\ A = 35,\ \text{măs}\ B = 25,\ \text{măs}\ C = 28.$$
$$\text{măs}\ (A \cap B) = 15,\ \text{măs}\ (B \cap C) = 13.$$

Acestea sînt 6 date independente, ceea ce este insuficient pentru a determina măsurile celor 8 termeni fundamentali ai formei canonice.

Pentru o investigaţie sistematică, să introducem aceste 8 necunoscute

$x = \text{măs}\ (A \cap B \cap C),\quad t = \text{măs}\ (A \cap B \cap C^z),$
$y = \text{măs}\ (A \cap B' \cap C),\quad u = \text{măs}\ (A' \cap B \cap C),$
$z = \text{măs}\ (A \cap B' \cap C^z),\quad t' = \text{măs}\ (A' \cap B' \cap C),$
$u' = \text{măs}\ (A \cap B' \cap C^z)$

de unde obţinem următoarele 6 ecuaţii

$$x + 2y + z + z' + t + t^z + u + u^z = 50$$
$$x + y + z = 15,\quad x + y + u = 13$$
$$x + y + z + t + u = 35,\quad x + y + z + t + u = 25,\quad x + y + z + t + u = 28.$$

Pentru a răspunde la întrebarea din enunţ, să

rezolvăm sistemul luînd ca necunoscute principale pe *x* şi *y*. Obţinem

$$\begin{array}{ll} \text{I z} = 15 - x & \text{t} = 10 \quad 2/ \\ \text{j } u = 13 - x & \text{u}^z = 10\ z' \\ \text{i t'} = x - 3 & = 5 - y. \end{array}$$

Ştim că cele 8 necunoscute sînt independente, şi că singura condiţie pe care trebuie s-o îndeplinească este să fie pozitive. Vedem atunci că *x* si *y* sînt supuse numai restricţiilor exprimate prin inegalităţile

$$3 < x < 13,\ y < 5.$$

RĂSPUNS. Numărul de partide în care toţi cei trei jucători au tras roşu este cuprins între 3 şi 13; numărul de partide în care toţi trei au tras negru, este cel mult 5.

De remarcat că dacă nu se caută condiţii necesare şi suficiente pentru numerele care rămîn nedeterminate, ci numai unele rezultate parţiale, putem găsi condiţii necesare folosind procedee mai puţin greoaie. De exemplu

***x* = măs (4 n *B* 0 C) = măs [(A CI B) O (B O C)j**

intervine în calculul numărului măs [(A ("I *B'ţ* U (BflC)]

dat prin măs [(A A *B)* U (BA C)] = 15 +13 -*x* = 28 - *x*.

Or, primul membru este, evident, cel mult egal cu măs *B* = 25, de unde

$$28 - x + 25, \text{ adică } x +> 3.$$

Tot astfel, dacă remarcăm că *y* = măs *(A'* D *B'* D *C')* dă

$$50 - y = \text{măs (A U } B \text{ U } C),$$

care este cel puţin egal cu măs (A U *B)* şi cu măs (BUC), calculăm imediat

$$\text{măs (A U } B) = \text{măs A + măs } B - \text{măs (A D B)} =$$
$$= 35 + 25 - 15 = 45$$

$$\text{măs (B U C)} = \text{măs B + rrăs } C - \text{măs (BA C)} =$$
$$= 25 + 28 - 13 = 40,$$

de unde 50 — *y* 45, prin urmare *y* 5.

Calculul este deci dirijat în funcţie de rezultatul căutat.

Acest studiu stă la baza *calculului frecvenţelor în statistică.*

b) ALTE MĂSURI ATAŞATE MULŢIMILOR FINITE

Urmînd convenţia curentă în probabilitate, notăm acum cu *U* mulţimea de referinţă (universul discursului). în plus, dacă s-a atribuit fiecărui element cîte un coeficient pozitiv, atunci fiecărei submulţimi îi atribuim un număr egal cu suma coeficienţilor elementelor care o constituie. Definim astfel o măsură a acestei submulţimi. Se foloseşte frecvent denumirea de *pondere a unui element* pentru coeficientul care îi este asociat, şi cea de *pondere a unei submulţimi* pentru suma ponderilor elementelor sale (cuvîntul „pondere" nu are aici sensul lui din fizică).

II. Probabilităţi (Cazul mulţimilor finite)

1) EXEMPLE INTRODUCTIVE ŞI DEFINIŢII

EXEMPLUL 1. Mulţimea *U* este constituită din *n* bile, unele albe, altele roşii, galbene sau verzi: de unde, 4 submulţimi disjuncte *A, R,G, V,* cărora le asociem numerele respective de elemente, fie ele *a, r, g, v-*

$$a+r+g+v=n.$$

Se presupune că bilele nu diferă între ele decît prin culoare. Prin urmare, dacă bilele se află într-o urnă şi sînt bine răscolite şi amestecate, cînd voi extrage o bilă din urnă luînd-o *la întâmplare,* n-am nici un motiv să mă gîndesc că voi extrage mai curînd o bilă decît o alta. Dar să presupunem, de pildă, că a = 60, *r* = 20, *g = v* =10; atunci este *mai probabil* că voi extrage o bilă albă, decît una de o altă culoare. Convenim să facem un număr mare de extracţii punînd de fiecare dată la loc bila extrasă din urnă şi amestecînd din nou bine. Ne aşteptăm că după 20—30 extracţii, numărul de bile albe

extrase să depăşească foarte net pe cel de bile roşii: această convingere îşi are, evident, originea în experienţă.

Dacă se face efectiv experienţa cu un număr mare de extracţii, să zicem 100 sau 1000 extracţii, se obţine un tabel de frecvenţe care pune în evidenţă o *lege statistică:* frecvenţele, pentru fiecare culoare, sînt *aproximativ* proporţionale cu numerele *a, r, g, o* de bile din fiecare culoare; şi acest rezultat apare cu atît mai net, cu cît numărul de extracţii este mai mare. Exprimăm acest fapt spunînd: *probabilitatea de a extrage o bilă albă* este $p_a = a/n$, probabilitatea de a extrage o bilă roşie $p_r = r/n$ etc.

Dacă condiţiile de experienţă au fost astfel încît rezultatele obţinute efectiv diferă de cele descrise mai sus, vom spune că probabilităţile de a extrage o bilă sau alta n-au fost egale (din cauză că, de exemplu, bilele roşii sînt mai aspre la pipăit, sau din cauză că amestecarea bilelor în urnă nu s-a făcut suficient de bine). Aceasta ne face să ne dăm seama că, Ia drept vorbind, noi n-am raţionat asupra mulţimii bilelor, ci asupra mulţimii posibilităţilor de extracţie, pe care le-am presupus echiprobabile. Este ceea ce se numeşte o *mulţime de evenimente echiprobabile.*

DEFINIŢII. Generalizînd, s în tem conduşi la următoarele:

Să numim *U* mulţimea evenimentelor considerate, presupuse aici in număr finit, şi fie că s-a definit o măsură *m(x)* asociată mulţimii submulţimilor *x.* Fracţia $p(x) = m(x)/m(U)$ este şi ea o măsură, fiindcă satisface condiţiile (a) şi (Ş). Ea se caracterizează prin aceea că satisface in plus şi condiţia:

$$(tc)\ p(U) = 1.$$

O asemenea măsură se numeşte *măsură probabilistică* sau *probabilitate.*

Această definiţie se extinde şi la cazul în care *U* cuprinde un număr infinit de evenimente.

Vom examina acum cîteva cazuri în care probabilitatea se evaluează fără dificultate.

EXEMPLUL 1. MULŢIME DE EVENIMENTE NEECHIPROBABILE- Am considerat mai sus evenimente care erau echiprobabile şi pe care, în continuare, le vom numi evenimente de primul tip: evenimentul consta în faptul că s-a extras o bilă determinată din bilele existente în urnă. Să presupunem însă acum că ni se cere probabilitatea de a extrage o bilă *care să fie sau albă, sau roşie* din urna descrisă în exemplul (1), adică din urna pentru care *a* =60, *r* = = 20, g =*v* = 10. Vom considera 4 evenimente distincte de cele precedente şi pe care le numim evenimente de tipul al doilea. Ele formează mulţimile:

***A:* s-a extras o bilă albă. Probabilitate: p(A) = = 0,6**

100

***R:* s-a extras o bilă roşie. *p(R)* = 0,2**

***G* şi *V:* s-a extras o bilă galbenă, respectiv, una verde.**

$$p(G) = p(V) = 0,1.$$

Evenimentul considerat *favorabil* aparţine lui *A sau H,* adică aparţine lui *A* U *R.* Numărînd evenimentele de primul tip, găsim printre ele 60 -f- 20 favorabile; prin urmare *p(A* U *R)* = 0,6 + + 0,2 =0,8.

Aşadar, în cazul dat, *p(A* U *R) = p(A) + p(R).*

Evident, rezultatul este corect, fiindcă o bilă nu poate fi simultan albă şi roşie. Am avut deci

$$A \cap R = 0, \quad p(A \cap R) = 0.$$

EXEMPLUL 2. Pentru a introduce *intersecţii nevide,* să presupu* nem, păstrînd ipotezele precedente, că unele bile sînt de piatră» iar altele din alte materiale: 30 bile sînt de piatră şi dintre ele> 10 sînt albe.

Să notăm cu *P* mulţimea evenimentelor de tipul al doilea: extragerea unei bile de piatră. Obţinem, numărînd evenimentele de primul tip:

***p(A)* =0,6; p(P) =0,3; *p(A* O *P)* =0,1;**
***p(A* U *P)* = 0,6 + 0,3 - 0,1 = 0,8**

Formula este U *P) = p(A') p(P) — p{ A* O *P).*

2) FORMULE FUNDAMENTALE

a) **COMPATIBILITATE. Spunem că evenimentele care constituie *A* şi *B,* submulţimi ale lui *U,* sînt *incompatibile,* dacă *A* O *B* = 0 .**

Formula *p(A* U *B) = p(A)* -ţ- *p(B)* traduce atunci *teorema probabilităţilor totale.*

Dacă, din contră, evenimentele care constituie submulţimile J4 **şi *B* sînt *compatibile,* formula generală este**

$$p(A \cup B) = p(A) + {}_{P}(B) - p(A \cap B).$$

Cînd, în particular, B c *A,* formula rezultă din A fi B = B şi *A* U B = *A.*

b) **PROBABILITĂŢI CONDIŢIONATE (SAU LEGATE); INDEPENDENŢĂ ÎN PROBABILITATE. Să presupunem că**

$$A \cap B \neq 0.$$

Deoarece *A* şi B nu sînt incompatibile, ne putem pune problema: care este probabilitatea ca un eveniment să aparţină lui B cînd se ştie dinainte că el aparţine lui J4? **De data aceasta, universul discursului este *A,* iar mulţimea evenimentelor favorabile este *A* O B. Probabilitatea de care este vorba, pe care o vom nota p_4(B), este deci**

$$/ D\backslash \_ \frac{\text{măs (A f~l } B)}{\text{măs (A)}} \_\_ \frac{P'A \text{ CI B)}}{\text{p(A)}}$$

Pentru a preciza notaţiile, în loc de *p(A)* vom putea scrie $p_v(A)$, aşa că, ţinînd seama şi de simetria între *A şi B,* formula se scrie

$$Pu(A \cup B) = p_v(A) \blacksquare P_A(B) = {}_{Pu}\{B) \text{ ' } P_B(A).$$

Să reluăm exemplul 2: probabilitatea ca o bilă albă să fie de piatră este 0,1/0,6 = 1/6. Probabilitatea ca o bilă de piatră să fie albă este 0,1/0,3 = 1/3.

Spunem că evenimentele care constituie *A* şi *B* sînt *independente în probabilitate* dacă avem

$$Pu(^{B}) = P_A(^{B}),$$

ceea ce implică

$$Pv(^{A}) = P_B(^{A})\text{-}$$

Relaţia este deci simetrică în *A* şi *B.* Ea exprimă că

există la fel de multe şanse de a avea un element de tip *B* ştiind doar că *B* este inclus în *U,* şi de a avea un element de tip *B* ştiind deja că el este de tip *A.*

In cazul contrar, spunem că există o *legătură în probabilitate* şi *coeficientul de influenţă relativă* este

$$\frac{P_A(^B)}{Pu(^B)} \quad \frac{P_B<^X)}{Pul\text{-}^4)}$$

In cazul nostru, coeficientul acesta este egal cu 5/9.

Definiţii analoage se pot da şi pentru 3, 4, ... submulţimi.

c) PROBABILITATEA UNUI PRODUS DE MULŢIMI. Fie două mulţimi *U₁* şi *U₂.* Amintim că se numeşte produs direct sau, pur şi simplu, *produs Ui* X *U₂* mulţimea *U* a perechilor ordonate (x$_x$, *x₂), x^Ui, x₂^U₂.* Rezultă de aici că o submulţime a lui *U* nu este, în general, un produs *E±* X E₂, G *Ui, E₂c.U₂,* fiindcă fiecare element *x$_r$* al lui *E$_Y$* ar trebui să fie asociat cu toate elementele lui *E₂.* Noi însă nu vom considera decît submulţimi care sînt produse. In caz contrar, ar trebui să le putem descompune într-o reuniune de produse disjuncte.

*** EXEMPLU. O urnă conţine 100 bile: 60 albe, 20 roşii, 10 galbene, 10 verzi. O altă urnă conţine 80 bile: 40 albe, 30 roşii şi 10 galbene. Extragem cîte o bilă din fiecare urnă. Care este probabilitatea de a obţine două albe?**

Mulţimea *U* conţine 100 X 80 = 8000 evenimente. Mulţimea *E* a evenimentelor favorabile este *E = A±* X *A₂,* a cărei măsură este

60 X 40 = 2400.

Prin urmare

$$p_U(E) = \frac{60 \times 40}{100 \times 80}\ ;\ \text{Or,}\ p_{U1}(A_1) = \frac{60}{100}\ \text{şi}\ p_{U_2}(A_2) = \frac{40}{80}.$$

Formula este *p^At* X ^2) = *Pu^AJ* X *p$_{U2}$.(A₂).*

Care este probabilitatea de a extrage o bilă albă şi una roşie? De data aceasta, mulţimea evenimentelor favorabile este

E' = (TIJ X fl$_2$) ^{u} **Mi** X **^2)** ^{cu} **Mi** ^{x} **^2) A (Ai** X ***A₂) = 0.***

Prin urmare

$$p(E') = P(A_Y \times R_2) + P(J \times A_2).$$

Din aceste cîteva exemple ne putem face o idee despre modul cum s-ar trata cazurile mai complicate.

■Problemele de aplicaţii necesită însă operaţii de numărare tipice analizei combinatorii; cîteva asemenea cazuri, dintre cele mai simple, vor fi studiate în Cartea a II-a, cap.l, § 1.

III. Probabilităţi continue (Cazul mulţimilor infinite)

Teoria măsurii — de exemplu, măsura lungimilor, a ariilor, a volumelor — permite să se ataşeze domeniilor nişte numere pozitive sau nule, în aşa fel încît reuniunii a două domenii disjuncte să-i fie ataşată suma măsurilor acestora. Din măsuri se pot deduce probabilităţi, însă calculul lor nu mai este atît de simplu ca în cazul unui număr finit de elemente şi necesită calcul integral (în particular, folosirea funcţiilor primitive alefuncţiilor date). Uneori însă calculul poate fi simplificat considerabil prin consideraţii de omogenitate şi de simetrie; şi tocmai asemenea consideraţii ne vor permite să tratăm, în încheierea acestei introduceri în studiul probabilităţilor, celebra problemă numită:

PROBLEMA ACULUI LUI BUl'FON

Pe un plan orizontal sînt trasate drepte paralele echidistante (distanţa d). Se aruncă la întîmplare pe plan un ac de lungime *a* mai mică decît *d.* Care este probabilitatea ca acul să taie una din drepte?

Cînd spunem că acul este aruncat la întîmplare, înţelegem că nu există nimic în modul de aruncare a acului care să favorizeze o direcţie faţă de alta. Probabilitatea ca acul să taie o dreaptă nu depinde atunci decît de lungimea *a.* Să o numim p_a.

I) In loc de ac, să ne imaginăm că aruncăm o linie

poligonală *L* de lungime *b* (care poate fi mai mare decît *d),* ale cărei *k* laturi au aceeaşi lungime *a* = fe/fr. La fiecare aruncare a lui *L, fiecare latură,* considerată separat, taie sau nu taie o dreaptă. Probabilitatea ca o latură dată să taie este p_a; dar la o aceeaşi aruncare se poate întîmpla ca mai multe laturi să taie dreptele paralele, aşa că din faptul că o latură taie o dreaptă, nu ştim cum să deducem probabilitatea ca linia poligonală *L* să taie: mulţimea evenimentelor „ o anumită latură taie“ şi mulţimea analoagă pentru o altă latură dată nu sînt disjuncte şi nu putem proceda prin adunare.

Pentru a depăşi dificultatea, să ataşăm evenimentelor „aruncarea liniei L“ cîte un coeficient pe care-1 numim pondere: ponderea unuia dintre aceste evenimente este nulă dacă *L* nu taie, este un număr *m* dacă o singură latură a lui *L* taie, este *2m* dacă două laturi taie etc.

Ponderile se adună: Ponderea *P* a mulţimii evenimentelor „aruncări ale liniei *L“* este suma ponderilor mulţimilor de evenimente „aruncări ale unei laturi date“ cînd se consideră succesiv toate laturile. Or, din punctul de vedere al probabilităţii, toate laturile joacă acelaşi rol, aşa că, dacă numărul de aruncări este suficient de mare, ponderile mulţimilor de „aruncări ale unei laturi date“ trebuie considerate ca fiind egale pentru toate laturile. Fie P_a această pondere, care nu poate depinde decît de *a.*

Rezultă

$$p = {}_k P_a = L p_a .$$
$$a$$

Dar acelaşi raţionament arată că, pentru fiecare latură, ponderea P_a este proporţională cu lungimea a: într-adevăr, dacă două lungimi *a* şi *a'* au o parte alicotă comună *c* astfel încît *a = hc* şi *a' = h'c,* vom avea

$$P_a = hP_c, \; P_a . = h' P_c,$$

prin urmare

$$P_a'$$
$$P_a \; h \; a$$

Dacă *a* şi *a'* sînt incomensurabile între ele, o trecere

la limită duce la concluzia enunţată, căci P_a tinde, evident, către zero cînd *a* tinde către zero.

Aşadar, P_a/a este o constantă X:

$$P_a = X \bullet a,$$

prin urmare $P = X \bullet b$.

Să evaluăm valoarea X; pentru aceasta, este suficient să cunoaştem *P* pentru o valoare cunoscută a lui *b.* Deoarece ponderea *P* a liniei poligonale *L* nu depinde decît de *b,* şi nu depinde în nici un fel de valorile unghiurilor sau de numărul de laturi, această pondere rămîne neschimbată dacă înlocuim *L* cu o linie curbă de aceeaşi lungime *b* şi de o formă oarecare. Or, un caz este evident: cel al unei circumferinţe de diametru *d,* fiindcă la fiecare aruncare există atunci două puncte comune; fiecare aruncare are ponderea 2»i şi dacă au fost efectuate *N* aruncări, ponderea totală va fi $P = 2mN,$ pentru o lungime $b = r.d.$ în felul acesta

$$\frac{\_\ 2z\text{»}.V_{\text{ş}}\text{j p - }^{2mjV\ 0}}{ml\ '^{\,a}\ \text{TV}\ d}$$

2) Ne rămîne să comparăm ponderea P_a cu probabilitatea $p_a.$ Or, evenimentele favorabile „acul taie“ au fiecare ponderea *m* (fiindcă inegalitatea $a < d$ asigură realizarea unei singure intersecţii), iar celelalte evenimente au ponderea nulă. Numărul de evenimente favorabile este deci $n = P_a : m,$ şi probabilitatea este

$$Pa = {}^{P}a \blacksquare {}^{mN}>$$

de unde concluzia $p_a = 2$«/îrd.

Se poate face şi o verificare experimentală; de exemplu, $a = d/2$ conduce la $p_a =$ 1/TC.

CARTEA A DOUA

ARITMETICĂ ŞI ALGEBRĂ

PARTEA I

TEORIA NUMERELOR

CAPITOLUL 1

ÎNTREGII

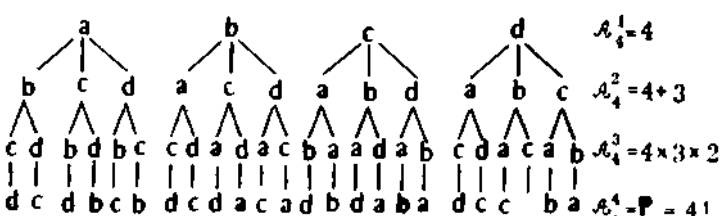
§ 1. NUMĂRĂRI (ANALIZĂ COMBINATORIE)

O mulţime finită de elemente are ataşat un număr cardinal *n,* element al mulţimii .V a întregilor naturali. Repartizarea acestor elemente în diferite subniulţinii pune probleme de numărare. Este vorba fie de *submulţimi* (definite prin elementele lor), fie de *şiruri* (submulţimi total ordonate). Pentru a uşura numărarea, este comod să se facă scheme, în general — în formă dc *arbore.*

1) NUMĂRUL DE ŞIRURI DE *p* ELEMENTE alese dintre cele *n* elemente ale unei mulţimi *E.* Fiecare din aceste şiruri se numeşte o *aranjare de n elemente luate cîte p.* Numărul de asemenea şiruri se notează In particular, dacă *n = p,* fiecare şir se numeşte o *permutare de n elemente;* numărul de permutări se notează P_n.

***O primă abordare a problemei.* Cum formăm toate aranjările de n obiecte luate cîte *p?* Alegem un prim obiect: *n* posibilităţi; apoi**

(I)



Ex n = 4

un al doilea element: (n — 1) noi posibilităţi; apoi un al treilea: (n — 2) noi posibilităţi de alegere şi aşa mai departe.

în felul acesta:

(I) şi (II) $A\% = n(n - 1) \dots (n - p\ 1)$

$$P_n = {}^n({}^n - I) \bullet\bullet\bullet 2\text{-}1 = n!$$

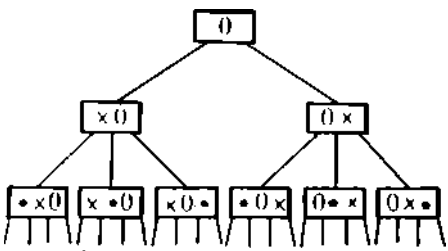
Pe schemă, fiecare lanţ indică o aranjare — dacă îl urmărim pînă la etapa *p,* şi indică o permutare dacă îl urmărim pînă la capăt.

O a doua abordare a permutărilor. **Să facem *p* = n, dar să dăm lui *n* valori succesive. Fiecare permutare de *k* elemente oferă *(k* + 1) poziţii pentru elementul următor. Prin urmare, numerele succesive de permutări sînt**

$P_{1=}$l, P_2=l-2, P_3= 1-2-3, ...

•Pfc+i = *Pkft* + 1)>

aşada P_n = 1-2-3 ... *n = n!*



2) NUMĂRUL DE SUBMULŢIMI DE *p* ELEMENTE alese dintre *n* elemente. Fiecare din aceste submulţimi se numeşte o *combinare* de *n* elemente luate cîte *p.* Numărul lor se

Fiecare din aceste combinări generează, prin permutarea ei, toate aranjările care cuprind elementele acelei combinări; aceasta înseamnă că mulţimea combinărilor de *p* elemente este *mulţimea cit* a mulţimii aranjărilor de *p* elemente prin relaţia de echivalenţă „au aceleaşi elemente", adică prin egalitatea submulţimilor.

Prin urmare, fiecare combinare generează P_p aranjări, şi

(III) ***CR =*** $\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}$ $= \frac{n!}{p!(n-p)!} = P$

Alt raţionament. **Combinările sînt elementele lui** S(JE), **mulţimea părţilor Iui *E.* Să presupunem că am format părţile mulţimii = {a, *b,* ..., r) cu *k* elemente. Părţile lui** E_{h+1} **= *{a, b,...,r,s]***

se obţin adăugind mulţimii â(.E_{ft}), mulţimea II/, obţinută adăugind elementul s la fiecare din părţile lui â(E_{ft}).

Aceasta înseamnă că

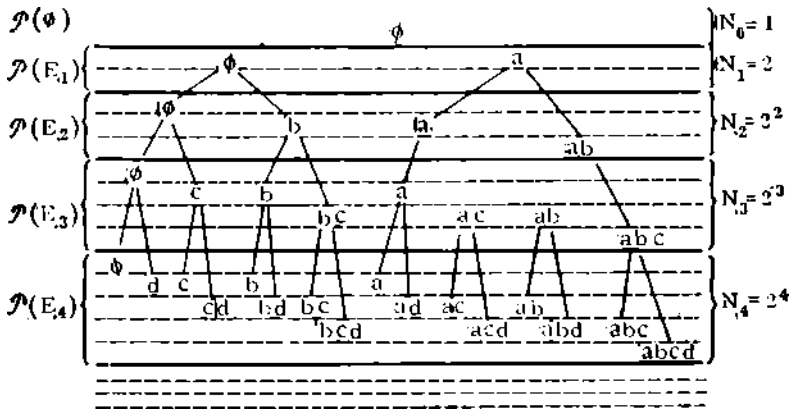
$$\text{cârd } â(£_{ft+1}) = 2 \text{ cârd}$$

Or, (numărînd şi partea vidă)

cârd â(E_0) = h cârd ^(*E*^ = 2, cârd â($£_z$) = 2^2;

prin urmare:

$$\text{cârd } S(£_n) = 2^n.$$



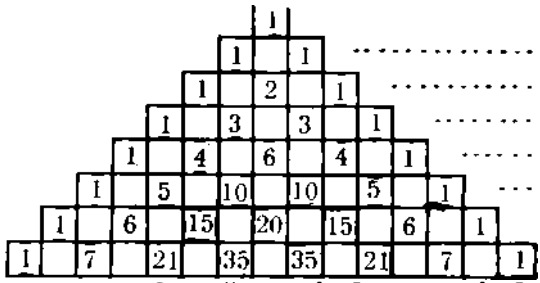
Dar care sînt părţile Iui 2(.E_{ft+1}) care au *p* elemente? Sînt părţile care aveau *p* elemente în şi părţile lui IT^ care aveau (p — 1)
elemente în â(E_{ft}), ceea ce înseamnă că

(-p = ('
'/< + ! ¹ k ‘ ' k -i- f 'i-i

(IV)

C_k^{p-1} ↘ ↗ C_k^p

C_{k+1}^p



în felul acesta, formăm rînd cu rînd tabelul numerelor *C£ : C%, C^, C£, ..., C^, C^.* Acest tabel este *triunghiul lui Pascal.* Se verifică uşor că numerele satisfac formula (III), că ele verifică realmente formula (IV), dar nu obţinem şi o nouă demonstraţie a formulei (III).

Să remarcăm următorul rezultat:

cârd 2(E$_n$) = C» + C* + q + ... + Q + ... + Q, adică

(V)

2n$_{=1 + ra+}$"("- 1) $_{2 \ldots p}^{+ \ldots +}$"±L-_^{l}l.-^"-P+^{1}>$_{+}$ ... + n $_{+}$ l. 1-2 1 -

Vom regăsi imediat pe altă cale această formulă. Deocamdată să reţinem că analiza combinatorie furnizează multe re lăţii curioase între numere.

APLICAŢIE: *Formula binomului.* Coeficienţii dezvoltării lui *(x a)^n* satisfac formula (IV); într-adevăr, termenul în a^{fc_p}x^{p+1} al dezvoltării lui (x -|- a)$^{ft+1}$ are ca coeficient suma coeficienţilor termenilor în *a^{k}~^{p}x^{p}* şi *a^{k}~$^{p+1}$* x^{p-1} din dezvoltarea lui (x -f- a)^{fe}.

Obţinem, în felul acesta

(VI)

(x 4- $_a$)^n = x^n + nax^n-i + *C^$_a^2$x^n~^{2} + ... + Cfci«x^n-'i + ... + $_a^n$*

care este *formula binomului lui Newton.*

Dacă facem *x = a* = I, regăsim formula (V); folosind şi alte valori numerice, obţinem un întreg ansamblu de formule de acelaşi tip: ele se numesc *formule sumatorii* şi dau sub formă explicită pe *f(n),* valoarea unei sume

de (n + 1) termeni.

EXEMPLU DE PROBLEMĂ. Se cere să se numere *şirurile* de p elemente care conţin exact a elemente *a,* [3 elemente *b,* ..., p elemente *r* din mulţimea (a, *b,* ..., r|. Evident, p = a + {3 -ţ- + ••• + P-

Mulţimea considerată este cîtul mulţimii permutărilor de p litere prin relaţia de echivalenţă care confundă între ele cele a litere *a,* cele (3 litere *b, ...* Prin urmare, numărul căutat este

$$\frac{Pp}{P_e P p \ldots P_p} = \frac{l{<}z + |3 + \ldots + p)\ !}{«!p!\ldots\ p!}$$

Numerele de felul acesta sînt coeficienţii termenilor dezvoltării lui (a + *b* 4* ••• + unde *p* este un întreg.

§ 2. ÎMPĂRŢIREA EUCLIDIANĂ

în Cartea I (Structuri fundamentale) am introdus noţiunea de număr întreg, pozitiv sau negativ. Din punctul de vedere al adunării, toate aceste numere sînt analoage, dar lucrurile nu stau tot aşa şi din punctul de vedere al înmulţirii. Şi tocmai aceasta este problema de care ne vom ocupa în principal în acest capitol, construit plecînd de la rezultatele Cărţii I, cap.2, § 1.

Am văzut că, fiind daţi doi întregi *a, b,*

$$0 < b < a,$$

există un întreg pozitiv *q* şi numai unul singur definit prin

$$bq < a < b(q + 1),$$

fapt pe care l-am exprimat spunînd că mulţimea este arhimedeană.

Introducem întregul *r* definit prin

$$r = a - bq.$$

Sistemul

$$\begin{cases} bq < a < b(q + 1) \\ r = a - bq \end{cases} \qquad (1)$$

asociază fiecărei perechi (a, *b)* unde *a > b,* o pereche *(q,* r). Această operaţie se numeşte *împărţire euclidiană a întregilor', a* este deîm- părţitul, *b* este împărţitorul, *q* este cîtul, iar *r* este restul.

în continuare, vom folosi şi alte sisteme, echivalente cu (1):

1 a = + r	*ta=bq* ₊ *r*
lO<r <*b*	|₀<r<6-l

DETERMINAREA CITULUI Şl A RESTULUI. Fie un întreg astfel încît *bq*ᵣ este mai mic decît *a.* Introducem

$$a - bq^{\wedge} = r_{\pm}.$$

Dacă r_x este mai mic decît *b, qi* şi r_x sînt numerele căutate. Dacă, din contră, $^{r}{}_{x}$ *b,* vom spune că am făcut o *împărţire parţială-,* q_T şi r_x sînt respectiv cîtul parţial şi restul parţial.

Vom folosi aceste două noi numere pentru a continua operaţia, împărţind mereu la *b:*

$$ri = bq_2 + r_2$$

operaţie care este mai simplă decît prima, fiindcă avem acum $r_x < a.$

Obţinem

$$r_2 < r_Y \text{ şi } a = b(q_x + g_2) + r_2.$$

Dacă r_2 nu este mai mic decît *b,* continuăm operaţia

$$^{r}2 = {}^{\wedge}3 + r_3,\ r_3 < r_2,$$

de unde

$$a = b\{q_Y + q_2 + q_3) + r_3 \text{ etc.}$$

Şirul resturilor parţiale r_{lt} r_2, r_3, ... este descrescător, numerele *r* rămînînd însă întregi pozitivi sau nuli: prin urmare, nu poate exista decît un număr finit de resturi; prin urmare şirul operaţiilor se opreşte. Or, şirul operaţiilor continuă atît timp cît dă un rest mai mare sau egal cu *b;* prin urmare se obţine, în mod necesar, un rest mai mic decît *b.*

[Atragem atenţia asupra acestui raţionament cu care ne vom mai întîlni. El se numeşte *coborîrea lui Fermat,* după numele ilustrului matematician (1601 — 1665)

care l-a formulat şi l-a folosit sistematic.]

Prin urmare, dacă r_n este mai mic decît *b,* obţinem

$$9 = 91 + Î2 + \bullet\bullet\bullet + 7n > {}^{r} = {}^{r}n$$

REMARCI. 1) Dacă *a* şi *b* sînt întregi de semne oarecare, vom introduce 0 *r* < | *b* |.

2) FOLOSIREA UNUI REST NEGATIV. Este mai sugestiv şi deseori mai practic să scriem

76 = 11 X 7 — 1 decît 76 = 11 X 6 + 10,
75 = 11 X 7 — 2 decît 75 = 11 X 6 + 9.

Numim *rest minim în valoare absolută* numărul *r'* definit prin *a= bq' + r'* | 2r' | < | *b* |.

Dacă

$$I\ 2r'\ | = |\ b\ |,$$

există două soluţii, şi atunci luăm *r'* > 0.

Teorema. *Citul împărţirii unui întreg a la produsul de întregi b_3~ b_2' b_3' ... b_n este ultimul cit obţinut împărţind succesiv pe a la b_{lt} împărţind citul obţinut la b_2 etc.*

într-adevăr, să scriem împărţirile succesive sub forma (3) şi să facem combinaţia liniară care elimină citurile intermediare, pe de o parte — din egalităţi, şi pe de altă parte — din inegalităţi; pentru a fixa ideile, să presupunem *n* = 3.

Obţinem:

$$a = (b_1b_2b_3)q_3 + (\hat{}î + b\pm r_2 \text{ -j- } bib_2r_3)$$

$$' \ {}^{0} < \quad + {}^{fc}i^{r}2 + bib_2r_3 < (f>_x - 1) + bi(b_2 - 1) +$$
$$+ 6\text{ı}6_2(\hat{}3^{-} 1)\ b_1b_2b_3$$

Prin urmare q_3 este citul împărţirii lui *a* Ia bjb_2b_3 şi restul este r = Fi + $bp\text{-}_2$ + bib_2r_3.

Se vede uşor că sistemul (2) nu ne-ar fi permis să ajungem la această concluzie; ar fi trebuit să punem în evidenţă că, de pildă din r_x < *bi,* se deduce că diferenţa $b_{\pm}$— r_r este cel puţin egală cu 1.

CAZ PARTICULAR. Dacă restul împărţirii lui *a* la *b* este nul, spunem că *a* este un *multiplu* al lui *b,* sau că *a*

este *divizibil cu b,* sau că *b divide pe a,* sau că *b* este *un divizor al lui a,* ceea ce înseamnă că

$$3q,\ a = bq.$$

In scris exprimăm aceasta prin simbolul 6| *a,* care se citeşte *b divide pe a.*

Notăm că noţiunea va putea fi generalizată la cazul în care *a* şi *b* aparţin unor mulţimi oarecare, păstrînd însă condiţia că *q este întreg.*

§ 3. DIVIZIBILITATEA. CONGRUENŢELE DE [ÎNTREGI.

Divizibilitatea este studiul resturilor împărţirilor, făcînd abstracţie de cîturi. Fie un divizor întreg pozitiv, ales o dată pentru totdeauna. împărţind la *d* toţi întregii succesivi, regăsim periodic aceleaşi resturi: dacă începem un nou rînd după fiecare *d* numere succesive, atunci primul rînd este rîndul resturilor 0, 1,2, *...,d*—1, iar numerele de pe o aceeaşi coloană corespund unui acelaşi rest. In felul acesta, mulţimea *E* a numerelor întregi este repartizată în *d* clase prin *relaţia de echivalenţă:* „dă acelaşi rest la împărţirea cu *d".* (Se vede imediat că această relaţie este, într-adevăr, reflexivă, simetrică şi tranzitivă.) Fiecare clasă de echivalenţă se numeşte *clasă de resturi,* iar relaţia de echivalenţă se numeşte *congruenţă de modul d.* (Se mai spune şi *modulo d).* Această relaţie se scrie

$$a = 6 (\text{mod } d)$$

şi se citeşte *„a* congruent cu *b,* modulo *d''.*

Exemplu: *d* = 4

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
•			
		4<?	
4?	4₉+l	+2	4ţ+3

Aşadar, prin definiţie, aceasta înseamnă că *a* şi *b* dau acelaşi rest la împărţirea cu *d*

3r, *q, q' : a = dq + r, b = dq'* + r, 0 *r < d.*

Dacă însă nu dăm atenţie valorii concrete a restului comun, vom folosi următoarele echivalenţe logice

***a ■= b* (mod d) <=> *3q, a — b = dq <=■> a — b* = 0(mod d).**

Congruenţe. în cele ce urmează, d va rămîne pozitiv, dar este comod să acceptăm ca deîmpărţituri şi resturi numere întregi de semne oarecare; proprietăţile la care vom ajunge vor rămîne valabile în toate cazurile. în loc de a introduce restul — număr cuprins între 0 şi d — 1 — este atunci deseori indicat să introducem, pentru a reprezenta fiecare clasă de resturi, numărul cel mai mic în valoare absolută: conform unei remarci anterioare, acest număr va fi:

dacă d este par, d = 2d', un număr din şirul -d'+l, — d' +2, ..., - 2, -1, 0, 1, 2, ..., d'-1, d'; dacă d este impar, d = 2d' + 1, un număr din şirul

- d', - d'+l, ..., - 1,0, + 1, ..., +d'.

Proprietăţi ale congruenţelor. Fie *d* modulul ales.

TEOREMA 1 *a = b* (mod *d) » Vm : a + m = b m* (mod d). TEOREMA *2 a = b* (mod d) <=* Vm : *am ~ bm* (mod d).

(Demonstraţiile sînt imediate, dacă introducem *q* prin *a — b = = dq* şi folosim proprietăţile corespunzătoare ale egalităţilor.)

TEOREMA 3 [a _ *b* (mod d) şi *a' = b'* (mod d)] —

==> *a + a'* 1 _ *b + b'* (mod d).

TEOREMA 4 [a _ *b* (mod d) şi *a' = b'* (mod d)] =>

=> *aa' =. bb'* (mod d).

Aceste teoreme ne permit să considerăm suma şi produsul unei clase de resturi cu un întreg (operaţii externe pentru mulţimea claselor), precum şi suma şi

produsul a două clase (operaţii interne). Fiecare din aceste două ultime operaţii este comutativă, iar produsul este distributiv faţă de sumă; aceasta înseamnă că mulţimea claselor de resturi de modul dat are o structură de *inel comutativ.* Elementul neutru al adunării este clasa care conţine pe 0, iar elementul neutru al înmulţirii este clasa care conţine pe + 1.

Insă acest inel diferă profund de inelul întregilor: în primul rînd, el nu conţine decît un număr finit de elemente. Pe de altă parte, clasa nulă poate avea divizori nenuli; exemplu:

5^0(modl0) şi 8^0 (mod 10), dar 5 X 8 = 40 = 0(mod 10).

Vom vedea mai departe că această dificultate dispare în cazul în care modulul este un număr prim, de unde importanţa acestor numere.

Reciproce ale teoremei 2. Să scriem în detaliu demonstraţia teoremei 2.

a = b* (mod d) *3q: a — b = dq

<=> 3q: ma — mb = mdq = d(mq) = (dm)q.

De aici deducem

ma = mb* (mod *d) **(2)**

dar şi

ma . mb* (mod *md) **(2')**

Reciproc, din (2') deducem

3? : *ma — mb = mdq,* prin urmare *3q : a — b = dq*

a* — 6 = 0 (mod *d),

de unde

TEOREMA 2'

a = b* (mod *d) <=> ma* 2 *mb* (mod *md)

(se schimbă modulul).

însă din (2), nu se poate deduce nimic relativ la a — *b* modulo *md. Membrii unei congruenţe nu pot fi împărţiţi cu unul din divi- zorii lor comuni, păstrînd modulul.* Simplificarea congruenţelor nu este permisă. Exemplu:

48 = 18 (mod 15),

însă, dacă împărţim la 3,

16 6 (mod 15).

TEOREMA 2"

***a* . 6(mod *md) a* = fc(mod d),**

dar reciproca nu este adevărată.

Această teoremă, deşi foarte simplă, este foarte importantă şi este enunţată deseori sub forma

a* 6(mod d) ==> *a* 6(mod *md).

Clase de resturi nule

Să facem *b* = 0 în formulele (2) şi (2").

TEOREMA *ibis*

***a* = 0(mod d) —*ma* . _ 0(mod d). adică**

d | *a* =&■ *d* / *ma*

sau

[d | *a* şi a | a'] *d*| *a'.*

TEOREMA *2terţ*

***a* = 0 (mod *md) a* = 0 (mod d), adică**

md* / *a d* / *a

sau

[d | d' şi d' | a] => *d* / *a.*

Aceasta exprimă *tranzitivitatea* relaţiei „este divizor al lui“ si a relaţiei „este multiplu al lui“, care sînt *relaţii de ordine* inverse una celeilalte.

Fie d clasa de resturi nulă de modul *a,* adică mulţimea multiplilor lui *a.*

a' d <=^> *a'* — 0(mod *a) a*| *a'*

şi, în mod analog, ® clasa de resturi nulă de modul *d.* Teorema poate fi scrisă

***a* e ® =s> d c ®**

sau

***d* / *a* ==> *d C* ®.**

Or,* dc® implică, in particular, *d*| *a.

Obţinem, în final

***d* | *a* <=> d C ®-**

Există deci un izomorfism între relaţia „este multiplu al lui“ şi relaţia de ordine prin incluziune a claselor de resturi nule. **Este însă vorba de ordini parţiale; în general, două clase nule nu sînt comparabile, fiindcă nici una din ele nu este inclusă în cealaltă. Tot astfel, relaţia „este divizor al lui“ este o relaţie de ordine parţială în mulţimea întregilor; ea nu va permite scheme liniare, aşa cum vom vedea în cele ce urmează.**

§ 4. MULTIPLI ŞI DIVIZORI. NUMERE PRIME

I. Multipli şi divizori ai unui întreg

A) Multiplii unui număr întreg

Multiplii unui întreg *a* sînt numerele *m = aq,* unde *q* este un întreg. Dacă *q = 1, m = a:* orice întreg este propriul său multiplu.

Dacă *q* =0, *m* =0: 0 este multiplu oricărui număr.

Deseori se spune că *m* este un *multiplu adevărat* al lui *a* dacă nu este nici nul, nici egal cu *a.*

Vom presupune, în general, *q* pozitiv şi nenul.

1) LISTA MULTIPLILOR LUI *a,* întreg pozitiv. Lista multiplilor este un şir ordonat, izomorf cu şirul întregilor: *a, 2a, 3a,..., ka, ...,* completat prin simetrie, dacă se consideră şi multiplii negativi. Vom numi d această mulţime. Ea are următoarea proprietate:

Dacă di şi a_2 sînt două elemente ale mulţimii, orice număr a $= XJPY + x_2a_2$, şi x_2 întregi aparţine şi el mulţimii. Această proprietate caracterizează un *ideal* pe inelul întregilor. Intr-adevăr, se numeşte *ideal al unui inel A* o submulţime «7 care, pe de o parte este ea însăşi un inel (adică suma şi produsul a două elemente ale lui *3* aparţin lui J) şi

care, în plus, este stabilă la înmulţirea cu un element oarecare al lui *A* (adică produsul unui element din *A* cu un număr oarecare din *A* face şi el parte din ZI):

1) Vlj , ^2 , ^1 "I" ^2 ŞI 11 X *l* o G <I •

2) Vi G J şi Va G *A, i* X *a* G *3.*

Deoarece, în cazul de faţă, idealul este format din multiplii unui singur număr *a,* el se numeşte *ideal principal.* Vom reveni, mai tîrziu, asupra acestei noţiuni pe care o vom regăsi în inelul polinoamelor.

2) *Din punctul de vedere al relaţiei de ordine „este divizor al lui",* structura lui & nu este chiar atît de simplă. Să facem, de exemplu, tabelul multiplilor lui 4 pînă la 4 X 25 = 100. Comu- tativitatea produsului pune în evidenţă lanţuri de tipul 4 | 8 | 24 sau 4 | 12 | 24.

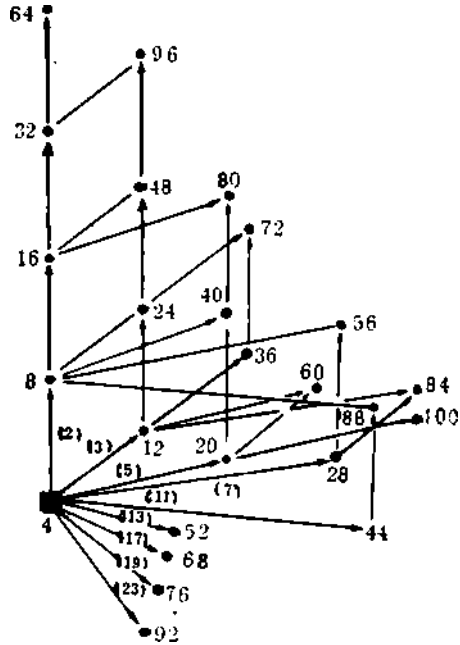
Vom conveni să reprezentăm prin translaţii în spaţiu fiecare operaţie „înmulţit cu 2", „înmulţit cu 3" etc. Asociativităţii produsului îi corespunde asociativitatea translaţiilor, aşa că este inutil să considerăm translaţia care reprezintă, de exemplu, înmulţirea cu 6, produsul 2x3. Multiplicatorii primordiali sînt deci cei care nu au divizori (diferiţi de 1 sau ei înşişi). îi numim *numere prime.*

în exemplul ales, factorul 11 este indispensabil pentru a forma multiplii 44 şi 88, dar structura schemei nu va fi elucidată decît dacă vom preciza lanţurile care duc la un multiplu oarecare *a,* în cazul general. Aceasta va rezulta ca o consecinţă a studiului numerelor prime.

B) Di vizor ii. unui întreg

Fie *a* un întreg pozitiv; să considerăm divizorii lui pozitivi. Cel mai mic este 1, iar cel mai mare este însuşi numărul *a.* Ceilalţi divizori, dacă mai există, se numesc „divizori adevăraţi"; numărul lor este finit.

1) *Lista dioizorilor.* Deoarece căutăm o submulţime finită a mulţimii bine ordonate a numerelor mai mici decît *a,* este suficient



să încercăm succesiv numerele luate în ordinea lor naturală: 2, 3, ... Dar fiecare divizor *d* este asociat cu un alt divizor *d'* prin *a = dd'*, aşa că dacă obţinem numerele *d* în ordine crescătoare, asociaţii lor *d'* se succed în ordine descrescătoare. Prin urmare, lista este completă în momentul în care numărul încercat devine mai mare decît cîtul împărţirii făcute pentru a efectua încercarea.

Se remarcă uşor că numărul divizorilor este în general par; el este impar dacă *a* este pătratul unui întreg.

Exemple:

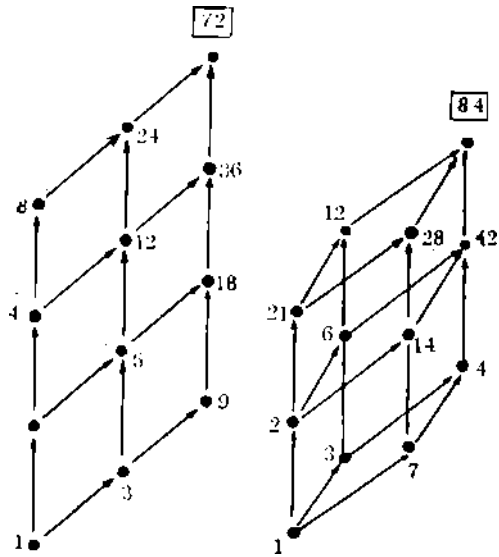
72 = 1-72 = 2-36 = 3-24 =4-18 =6-12 =8-9

84 = 1-84 = 2-42 = 3-28 = 4-21 = 6-14 = 7-12.

2) *Din punctul de vedere al relaţiei de ordine „este divizor al lui'' j* să examinăm structura pe cele două

scheme corespunzătoare numerelor 72 şi 84. Vedem că din 1 pleacă lanţuri de multipli care ajung la numărul dat. Oricare două numere din schemă au cel puţin un multiplu comun şi cel puţin un divizor comun. Ştim că aceasta corespunde unei relaţii de ordine prin incluziune în mulţimea multiplilor fiecărui număr. Spunem că mulţimea are *o structură de reţea* şi vom nota 3_a reţeaua divizorilor lui *a.* Am reprezentat, aşadar, S-$_2$ şi ®$_{84}$.

In cazul general, ţoale numerele situate deasupra Iui 1 fără intermediari sînt numere prime (după teorema 2 *bis* a congruenţe



lor). Prin urmare, *orice număr are cel puţin un divizor prim* (pe el însuşi, dacă numărul este prim). Dar se poate spune mai mult:

Orice număr este un produs de factori primi.

într-adevăr, dacă *a* este prim, avem *a* = 1 • a, Dacă *a* nu este prim, folosim o descompunere oarecare în produs a lui *a,* apoi descompunem în mod analog fiecare factor neprim (datorită asociativităţii

produsului). Deoarece numărul divizorilor diferiţi de 1 este finit şi deoarece factorii nu pot interveni decît de un număr finit de ori, operaţia de descompunere se termină, şi ea se termină cînd toţi factorii produsului sînt primi.

Pe schemele noastre, aceasta înseamnă că nu luăm în considerare decît translaţiile care corespund la factori primi şi că lanţurile conduc (totuşi!) la numărul a dat.

Dar oare toate aceste lanţuri care merg de la numărul 1 la un număr *a* nu diferă între ele decît prin ordinea translaţiilor? în cele două exemple considerate — da; dar faptul acesta trebuie analizat în cazul general.

în felul acesta, cele două studii preliminare asupra multiplilor şi divizorilor unui număr ne arată că este obligatoriu să studiem numerele prime.

II. Teoremă fundamentală

Unicitatea descompunerii unui întreg într-un produs de factori primi.

în mulţimea întregilor, să considerăm submulţimea constituită din întregii care au mai mult de o descompunere în factori primi: vrem să arătăm că această submulţime este vidă.

5R. este minorată de 1, precum şi de toţi întregii primi care au fost studiaţi direct, prin urmare, datorită proprietăţii de ordine a mulţimii întregilor, «HI (dacă nu este vidă) are un element minim, *m* > 1, cu (cel puţin) două descompuneri pe care le notăm

$$™ = p>r^{i}...p?=A?i..._{s}>,$$

unde numerele p_i şi *Sj* sînt toate diferite (fiindcă altfel, după simplificare, proprietatea ar fi adevărată pentru un număr mai mic decît m).

Să considerăm, în particular, cîte un factor prim din fiecare membru, de pildă, factorii p şi s; egalitatea se scrie

$$m = pP = sS,$$

unde P şi S conţin ceilalţi factori primi.

Deoarece p şi s nu sînt egali, fie de exemplu $p > s$; putem face împărţirea

$$p = sq + r,\ r < s,\ r\ 0$$

fiindcă p este prim.

Prin urmare,

$$m' = m — sqP$$

are două descompuneri

$$m' = s(S — qP) = rP < m.$$

Dar numărul prim s care figurează în prima descompunere a lui m' nu figurează şi în cea de a doua descompunere: el nu figurează în descompunerea lui P prin ipoteză, şi nu figurează în descompunerea lui r din cauză că $r < s.$ Prin urmare, m' este mai mic decît m şi are totuşi două descompuneri: s-a ajuns la o contradicţie. Prin urmare e>ll este vidă.

Pe scurt, arătăm că oricărui element din oUt îi putem asocia un alt element din cHi mai mic decît el, ceea ce contravine structurii unei mulţimi de întregi. Recunoaştem raţionamentul numit mai înainte *coborîrea luiFermat*; sub o formă saualta, acesta, împreună cu raţionamentul prin recurenţă, este raţionamentul prin excelenţă al teoriei numerelor.

III. Aplicaţii. Multipli şi divizori comuni

1) Structura idealului principal & şi cea a reţelei sînt complet elucidate: pe schemele noastre, singurele translaţii care trebuie marcate sînt cele asociate numerelor prime, iar diferitele lanţuri care leagă două numere nu diferă între ele decît prin ordinea de succesiune a acestor translaţii.

2) MULTIPLI COMUNI MAI MULTOR NUMERE. Fie «, b, ..., v un număr finit de întregi. Multiplii lor comuni formează intersecţia mulţimilor multiplilor respectivi d fi $ C| ... PI^0$?. Or, descompunerea în factori primi a

acestor multipli comuni se obţine luînd *cel puţin* toţi factorii primi care figurează în *cel puţin una* din descompuneri, cu exponenţii *cel puţin* egali cu cei care figurează în aceste descompuneri. Rezultă de aici că mulţimea considerată este mulţimea multiplilor celui mai mic multiplu comun. Prin urmare, *intersecţia idealelor principale* d, *S>, ..., "V este idealul principal* SH. *generat de cel mai mic multiplu comun m.*

3) **DIVIZORI COMUNI MAI MULTOR NUMERE. Mulţimea divizo- rilor comuni numerelor *a, b, ...* , p este intersecţia reţelelor 3_a, • ••, Or, descompunerea în factori primi a acestor divizori comuni se obţine luînd *cel mult* factorii primi care figurează în *foaie* descompunerile cu exponenţi *cel mult egali* cu cei care figurează în aceste descompuneri. Rezultă de aici că mulţimea considerată este mulţimea divizorilor celui mai mare dintre ei. Prin urmare, *intersecţia reţelelor* 3_a, *..., este reţeaua asociată celui mai mare dioizor comun.***

Ca toate operaţiile de intersecţie, operaţiile de formare a celui mai mic multiplu comun şi a celui mai mare divizor comun sînt *comutative* şi *asociative.*

REMARCĂ. în cazul a două numere *a, b,* regulile de formare a celui mai mic multiplu comun şi a celui mai mare divizor comun arată că produsul acestora este egal cu produsul celor două numere. *m-d = a-b.*

4) **Idealul oUl există totdeauna; el are ca submulţime idealul principal generat de produsul numerelor, însă reţeaua 3_d se poate reduce la un singur număr 1. Spunem atunci că numerele date *sînt prime între ele luate în ansamblu*; numerele pot să nu fie prime între ele, două cîte două — este cazul în care fiecare factor prim nu apare decît în descompunerea unuia din numere. Numerele prime două cîte două au proprietăţi comparabile cu cele ale numerelor prime, de exemplu:**

Pentru ca un număr să fie un multiplu al unui produs de factori care sînt primi doi cîte doi, este necesar şi suficient ca el să fie multiplu al fiecărui factor.

(Condiţia este evident necesară, şi ea este şi suficientă fiindcă lista multiplilor este idealul generat de produsul acestor numere fără factori primi comuni.)

Un enunţ, consecinţă imediată a teoremei fundamentale şi foarte frecvent utilizat, este următorul:

Dacă un număr divide un produs de* DOI *factori şi este prim cu unul din ei, îl divide pe celălalt.

APLICAŢIE A TEOREMEI FUNDAMENTALE LA CONGRUENŢE DE MODUL PRIM

Teoremă. *Dacă d este prim, a-b* = 0(mod d) *implică* a = 0 *sau b* = 0.

într-adevăr, a spune că *a* este prim cu *d* înseamnă în cazul de faţă că nu este multiplu al lui *d;* trebuie atunci ca *b* să fie multiplu al lui *d.*

Teorema reciprocă teoremei 2 a congruenţelor:

***[m* prim cu *d* şi *ma - mb(mod* d)] =s> *[a* : _ i(mod d)j.**

într-adevăr, aceasta înseamnă a spune că dacă d divide pe *ma — mb - m(a — b)* şi este prim cu *m,* el divide pe a — *b.*

Altfel spus, *putem împărţi cei doi membri ai unei congruenţe cu un număr prim cu modulul.* în particular, dacă modulul este un număr prim, este suficient să ne asigurăm că nu împărţim cu un multiplu al modulului; prin urmare, *putem împărţi cei doi membri ai unei congruenţe de modul prim cu un număr necongruent cu zero.*

în felul acesta, congruenţele de modul prim au aceleaşi proprietăţi ca egalităţile, în raport cu adunarea, înmulţirea şi simplificarea prin împărţire (divizorul divide, fireşte, ambii membri).

5) **Teoremă. *In mulţimea întregilor, orice ideal J generat de n numere* $a_1; a_2, \ldots, a_n$ *este un ideal principal.***

Altfel spus, mulţimea numerelor

$$i = + x\hat{}t_2 + \bullet\bullet\bullet + {}^{x}n^{a}n$$

coincide cu mulţimea multiplilor unui număr.

în primul rînd, orice număr *i* este un multiplu al celui mai mare divizor comun *d* al numerelor date, de unde rezultă incluziunea «7 C Ceea ce trebuie să demonstrăm este incluziunea inversă.

Dintre elementele pozitive ale lui <7, să-l considerăm pe cel mai mic şi nenul, fie el *j.* Fie, aşadar, $j = X_1a_1 + X_2a_2 + \ldots + X_na_n$ cel mai mic element pozitiv al lui *J.* El este mai mic decît a_1 (sau, cel mult egal cu care aparţine lui ,7, ceea ce înseamnă că putem face împărţirea

«î $= j<l + {}^{c}'i-$ 0 Oi < *î-*

Dar

$$= J^{f}l — (1\ X_1q)a_1\ X_2q\ a_2 \ldots X_nq\ a_n$$

aparţine lui <7 şi este mai mic decît *j*; prin urmare, el nu poate fi pozitiv; el este deci nul, aşadar *j* este un divizor al lui $a_{\pm}$.

Acelaşi raţionament se aplică lui $a_2, \ldots, a_n$, şi rezultă că *j* este un divizor comun, prin urmare — un divizor al celui mai mare divizor comun *d.*

Deoarece am văzut că *d* divide toate elementele *i* şi, în particular, pe *j,* obţinem *j = d* şi, cum multiplii lui *j* aparţin lui «7, avem ® C *J.*

Din cele două incluziuni inverse rezultă *J = ®.*

Prin urmare, *idealul generat de n numere întregi este idealul principal generat de cel mai mare divizor comun al acelor numere.*

Remarcăm, în încheiere, că am folosit, o dată în plus, proprietăţile de ordine totală a mulţimii întregilor şi faptul că marginea inferioară a unei mulţimi de întregi care este minorată aparţine mulţimii.

Acestea sînt proprietăţi pe care *nu* le vom regăsi în inelul poli- noamelor. Totuşi, unele din proprietăţile pe care le-am demonstrat mai sus se vor păstra, şi tocmai de aceea este bine să reluăm expunerea într-o formă care să fie valabilă şi pentru polinoame. Aceasta va face obiectul § 7.

§ 5. STUDIUL NUMERELOR PRIME

1) Numerele prime — care servesc, aşa cum am văzut, la constituirea tuturor numerelor — sînt, prin definiţie, numerele care rămîn din mulţimea întregilor după ce se suprimă din ea toate numerele care au divizori adevăraţi, o definiţie oarecum negativă. însă acest fapt ne face să bănuim că nu dispunem de o metodă de a descoperi proprietăţile acestor numere. Noi ştim mai curînd ce nu sînt, decît ceea ce sînt aceste numere. Singura metodă adecvată pentru studiul lor'este cea a Ciurului lui Eratostene.

Considerăm şirul infinit al întregilor, 1, 2, 3, ... , n, *n* + 1, ...

Numărul 1 nu este considerat, în general, număr prim.

2 este prim, singurul număr prim care este par. îl păstrăm şi „barăm" multiplii lui, numerele plasate din 2 în 2 începînd cu el.

3 este prim. îl păstrăm şi barăm multiplii lui, numerele plasate din 3 în 3 începînd cu el.

4 este deja barat ca fiind multiplu al lui 2, şi la fel şi toţi multiplii lui. în felul acesta ne vine în minte remarca: *este suficient să barăm multiplii numerelor prime.*

5 nu este încă barat, prin urmare el este prim, fiindcă altfel el ar fi fost barat în momentul cînd am fi considerat unul din divi- zorii lui, de unde — o a doua remarcă: *primul număr nebarat care urmează după ultimul număr prim studiat este prim.*

Urmează apoi 6, barat de 2 şi de 3, apoi 7, nebarat, prin urmare — număr prim; îl păstrăm şi barăm multiplii lui, situaţi din 7 în 7 începînd cu el. Dar primii lui multipli sînt baraţi, aşa că este suficient să începem să numărăm din 7 în 7 începînd cu $7^2 = 49$. Prin urmare, *cînd studiem un număr prim p, primul număr care trebuie barat este pătratul său, p^2.*

După 7, urmează 8, 9, 10, deja baraţi, apoi 11, nebarat, care este prim şi care ne va face să barăm numere începînd cu $11^2 = = 121$. Prin urmare, dacă ceea ce vrem este lista numerelor prime mai mici decît 120,

treaba este terminată: numerele prime căutate sînt toate numerele păstrate (nebarate). Enunţăm regula: *Pentru a obţine lista numerelor prime mai mici decît N, este suficient să continuăm operaţia de „trecere prin ciur" pînă ce ajungem la un număr prim al cărui pătrat depăşeşte numărul N.*

2) MULŢIMEA NUMERELOR PRIME. Oricît de mare ar fi *N,* lista numerelor prime mai mici decît *N,* aşa cum am obţinut-o mai sus, nu epuizează mulţimea numerelor prime. Intr-adevăr, în fiecare etapă, am barat numere din 2 în 2, din 3 în 3 etc.; prin urmare, numerele care urmează şi care preced un număr barat *în toate etapele,* sînt sigur nebarate. Astfel, numerele (2 X 3 X 5 X ... • •• X p) ± 1 nu sînt barate, dacă *p* este cel mai mare număr prim mai mic decît *N,* adică — ultimul număr prim studiat. Aceste numere sînt mult mai mari decît *p;* ele sau sînt prime, sau nu sînt prime, caz în care ar urma să fie barate dacă am continua operaţia ciurului cu un număr prim încă neutilizat, mai mare decît *p.* în orice caz, faptul acesta dovedeşte existenţa a cel puţin unui (şi chiar a două!) numere prime mai mari decît *N,* oricît de mare ar fi *N.* înseamnă că *există o infinitate de numere prime.*

Acest rezultat este cunoscut încă din antichitate (Eratostenc, circa 200 ani î.e.n. Demonstraţia în *Elementele* lui Euclid). El ne determină, în mod firesc, să ne întrebăm care sînt legile care guvernează succesiunea numerelor prime, care sînt formulele care, dacă nu pot să dea toate numerele prime, pot măcar să nu dea decît asemenea numere. însă problemele de tipul acesta n-au putut fi rezolvate.

Unul din rezultatele importante obţinute este teorema lui Lejeune-Dirichlet: în orice progresie aritmetică în care raţia şi primul termen sînt numere prime între ele, există o infinitate de numere prime.

Tabelele de numere prime, continuate pînă foarte departe (cu multe milioane de numere prime!), arată că există numere impare consecutive care sînt ambele prime (de pildă 881 şi 883); ele se numesc „numere prime gemene". Oare perechi de felul acesta există în

număr infinit? Nu dispunem decît de cîteva enunţuri de tipul următor: Există o infinitate de perechi *n, n* -|- 2 de numere care au mai puţin de 9 factori primi. (Viggo BRUN ; Oslo, 1920). Acelaşi savant a demonstrat că, oricare ar fi *n,* între *n* şi *n* -f- /n există numere care au mai puţin de 11 factori primi.

Metode de cu totul altă natură, care ţin de domeniul analizei, permit abordarea în alt mod a acestei probleme, care rămîne totuşi una din cele mai misterioase pe care le pune cercetătorului studiul matematicii elementare.

§ 6. NUMERAŢIA

Proprietăţile numerelor întregi pe care le-am studiat permit construirea unui sistem de convenţii cu ajutorul cărora putem scrie un număr întreg dat şi îi putem da un nume, oricît de mare ar fi acel număr.

I. Principiul numeraţiei de poziţie

Fie *a* un număr întreg ales o dată pentru totdeauna, pe care îl numim *bază* a sistemului de numeraţie.

$$a > 2.$$

Teoremă. *Orice întreg N poate fi scris într-un singur mod sub forma*

$$N = x_n a^n + \quad + \ldots + x_h a^h + \ldots + x_x a + i_0,$$

unde numerele x_h sînt întregi pozitivi sau nuli care verifică

$$0 < x_k < a - 1 \bullet$$

Pentru a demonstra afirmaţia, să notăm, admiţînd că expresia există,

$$R_k = x_k a^k 4- \quad \ldots + Xjd + .T_0$$

$$N - R_k = x_n a^* + z_{n\_1} a^{n"1} + \ldots + x_{h+l} a^{h\sim l} =$$

Qk Ş' ˢ'ⁿt cîtul şi restul împărţirii lui *N* la a^{h+1}, fiindcă avem

$$R_k < (a - l)a^h + (a - l)^{\wedge'^1} + \ldots + (a - l)a + (a - 1) = \bullet = a^{k+1} - 1.$$

Acestea fiind spuse, definim coeficienţii x_k din aproape în aproape, în ordinea descrescătoare a indicilor, luînd

drept x_n — cîtul împărţirii lui *N* la a^n,

drept $x_n a + i_{n\_1}$ — cîtul împărţirii lui *N* la a^{n-1},

drept $x_n a^2 + x_{n\_x} a + a;_{n\_2}$ ⁻ cîtul împărţirii lui *N* la $a^{n\sim 2}$ etc. Obţinem astfel singura soluţie posibilă, dacă o asemenea soluţie există. Or, numerele x_k introduse sînt realmente mai mici decît *a.* dacă *n* a fost definit prin

$$a^n < N < a^{n+1}$$

fiindcă, dacă una din împărţiri este *N* = + R_k, împăr ţirea următoare este

$$7V = (Q_k a + x_h)a^h + R_{k\_1},$$

de unde

$Rk = {}^x k^{ah} + {}^{\wedge}k\text{-}i < a^{h+1}$, prin urmare $x_k < a$.

în fine, ultima împărţire, cea la *a,* dă pe x_0 şi demonstrează că expresia obţinută este într-adevăr aptă să reprezinte pe *N.*

Prin urmare, *există o corespondenţă biunivocă între numerele N care verifică a* $N < a^{n+1}$ *ţi şirurile de n* -Ţ- 1 *numere* $x_{x>} 0 < x_x < a$.

Supraliniind pentru a evita confuzia cu un produs, vom scrie

$$N = x_n x_{n\_i} \ldots x_k \ldots X^{\wedge} XQ.$$

REMARCĂ. La fel de bine, am fi putut determina mai întâi pe x_0, restul împărţirii lui *N* la a, apoi pe $x_{\pm} a$ + «o, restul împărţirii lui *N* la a^2 şi aşa mai departe, în ordinea crescătoare a indicilor.

CONVENŢIE DE SCRIERE. Se aleg simboluri pentru numerele mai mici decît *a,* inclusiv pentru zero; aceste simboluri sînt suficiente pentru a scrie coeficienţii x_k şi

deci, pentru a scrie pe *N.* Aceste simboluri se numesc *cifre.* (Ele nu se supraliniază, cînd sînt folosite). în practică, se folosesc simbolurile 0, 1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, fiindcă baza este zece.

II. Reguli practice ale operaţiilor

Un număr scris într-un sistem de numeraţie cu baza *a* este un polinom în *a.* Prin urmare, regulile de operare ar trebui să fie exact cele referitoare la polinoame, dacă condiţia impusă coeficienţilor de a fi pozitivi şi mai mici decît *a* n-ar obliga la operaţii de report:

(a + *b)a*^{n} trebuie scris a^{n+1} 4* *ba*^{n}, dacă 0 < *b* < *a.*

Vom lua *a* = zece.

1) ADUNARE. Se foloseşte un tabel scris pînă la 9 + 9.

De notat că, atunci cînd se adună două numere, oricît de mari ar fi ele, reţinerea (numărul care trebuie reportat) nu poate depăşi 1 (fiindcă 9 + 9 = 18, care adunat cu 1 de la reţinere, nu dă decît 19). Dacă se adună, de pildă, 10 numere, reţinerea nu poate depăşi 9 (fiindcă 9 X 10 — 90 care, adunat cu 9 de la reţinere, nu dă decît 99).

Calculele rămîn atunci suficient de simple pentru a putea scrie direct cifrele succesive ale rezultatului, fără a scrie calculele intermediare. Cînd însă trebuie făcută suma unui număr mare de termeni, este preferabil să se calculeze mai întîi sume parţiale, folosind asociativitatea.

2) SCĂDERE. Scădem fiecare termen al sumei care constituie al doilea număr, din termenul asemenea al polinomului care constituie primul număr. Insă pentru a evita coeficienţii negativi, adăugăm — dacă este nevoie — o aceeaşi putere a lui *a* la cele două numere; dacă avem $x_k < y_k$, înlocuim diferenţa

$$(x_h a^k - y_k a^k) \text{ cu } (a + z_A)a^h - y_k a^k - a^{k+1}.$$

Făcînd aceasta, spunem că *reţinem* 1 în momentul cînd facem *(« + x_k) — y_k,* pentru a transporta acest 1 şi a face Î/R_{+1} + 1.

Vedem că, la o operaţie de scădere, reţinerile nu pot depăşi 1. Or, a spune că un număr *N* este mai mare decît un număr A[7'] echivalează cu a spune că scăderea *N — N'* este posibilă. Deducem de aici următoarea regulă:

Regulă pentru a recunoaşte ca un număr este mai mare decît un altul: *N* este mai mare decît *N'* dacă are mai multe cifre sau, în caz că are acelaşi număr de cifre, dacă prima cifră care diferă pornind de la stînga este mai mare la *N* decît la *N*[1].

Fireşte, această regulă foarte importantă poate fi demonstrată direct, pornind de la semnificaţia grupurilor de termeni ai polinomului, pe care le-am notat $Q_k a^{k+1}$.

3)ÎNMULŢIRE. Folosim regula înmulţirii unei sume cu o sumă şi facem reporturile necesare. în procedeul folosit efectiv în zilele noastre, scriem sumele parţiale care corespund înmulţirii deînmul- ţitului cu fiecare cifră a înmulţitorului, ceea ce necesită folosirea tablei înmulţirii pînă la 9 X 9 şi introduce reţineri care nu depăşesc 8, reţineri pe care le facem în minte, aşa că nu scriem efectiv decît înmulţirea propriu-zisă. în ceea ce priveşte adunarea finală, ţinînd seama de observaţia cu privire la reţinerile la o adunare, avem interesul să adunăm cît mai puţine numere, aşa că luăm ca înmulţitor pe acela din cele două numere care are mai puţine cifre diferite de zero.

4) ÎMPĂRŢIRE. Am indicat deja că metoda constă în a face împărţiri parţiale pe care le continuăm luînd de fiecare dată restul provizoriu precedent drept deîmpărţit, pentru a găsi un nou termen al citului. în practică, procedeul constă în a calcula cîtul cifră cu cifră, folosind cituri parţiale de forma $g_p 10^p$, q_p 9.

în primul rînd, împărţirile cu 10^p — care se fac imediat, conform teoremei fundamentale a numeraţiei — indică cea mai mare valoare acceptabilă pentru *p*, adică numărul de cifre ale citului.

Stabilind în felul acesta că expresia citului este de forma $q_n a^n$ Ţ- + 7n-i[an_1] + ••• + qi^a + <7o unde *n* este cunoscut, căutăm mai întîi pe q_n. Prin tatonări,

încercînd cu înmulţiri cu cifre de la 1 la 9, obţinem cel mai mare număr de forma $q_n a^n$ al cărui produs cu divizorul mai poate fi scăzut din deîmpărţit. Calculăm după aceea diferenţa între deîmpărţit şi acest produs, şi luăm acest rest parţial drept nou deîmpărţit pentru a-1 căuta pe g_{n-1} etc.

Metoda presupune că ştim să calculăm produsul unui număr oarecare cu un altul care are numai o singură cifră. în afară de aceasta, produsele şi scăderile se fac simultan, ceea ce poate conduce la reţineri egale cel mult cu 9 (9 X 9 = 81; 81 scăzut din 90 : reţin 9; 81 + 9 = 90 etc.).

Ştim că nu se scriu zerourile inutile la citurile parţiale, că se „coboară[11], una cîte una, cifrele deîmpărţitului, pe măsură ce acestea intervin, şi că se reduce numărul de tatonări prevăzînd reţinerile care survin la înmulţiri.

REMARCĂ. La împărţirile succesive de la algoritmul lui Euclid, cînd se caută cel mai mare divizor comun (vezi mai departe § 6), fiecare rest devine la rîndul lui împărţitor. Pentru a lăsa loc pentru transcrierea acestor resturi, în procedeul uzual (cel puţin în Franţa) cîturile sînt plasate deasupra divizorilor corespunzători; locul rămas liber sub divizor este folosit pentru a scrie resturile succesive :

Exemplu: 1734 şi

	22	4
1734	78	18
174	6	0
18		

Cel mai mare divizor comun este 6.

5) EXTRAGEREA RĂDĂCINII PĂTRATE. Să vedem acum regula practică de extragere a unei rădăcini pătrate, în contrast cu regula împărţirii.

Fiind dat un număr *N,* căutăm un întreg *u* definit prin

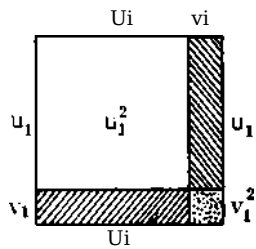
$$u^2 < N < (u + l)^2 \text{ si notăm}$$
$$V - u^2 = r;$$

aceasta se poate exprima şi sub forma

$$N = u^2 4- r, 0\ r\ 2u.$$

Ca şi la împărţire, vom fi conduşi să considerăm mai întîi o operaţie parţială; vom folosi un număr astfel încît u^2 este mai mic decît *N,* şi vom calcula restul provizoriu

$$- uf = r_x.$$



Dacă *r*| > $2u_{15}$ operaţia trebuie continuată, însă operaţia care trebuie făcută acum este de altă natură decît prima: nu mai este vorba de a forma un pătrat, ci de a *mări pătratul iniţial.* Căutăm un număr astfel încît = $2u_1t)_1$ + *vj* să fie mai mic decît r_r. Noua rădăcină pătrată provizorie va fi u_2 = u_x + v_Y, iar noul rest provizoriu va fi

$$r_2 = rj — \{2u_lv_l + Vi)^2 = N — (uj + vj)^2.$$

După aceea luăm totul de la început, înlocuind pe r_1 cu r_2 şi pe u_x cu u_2.

***O* remarcă simplifică calculul: dacă este mic faţă de u_n, pătratul v^2 este mic şi poate fi provizoriu neglijat; atunci**

~ 2^! arată că v_x este cîtul împărţirii lui .s_x la $2u_t$. Numai că în felul acesta riscăm să găsim un număr P_x prea mare; de aceea, trebuie să-l încercăm în prealabil, calculînd

$$— (2UIÎ>I + vî) = «i — Vi(2u! + vj.$$

CALCULUL PRACTIC. *N* fiind dat sub forma lui zecimală, căutăm rădăcina sub forma

$$u = x_n a^n + a:_{n\_x} a^{n-1} + ... + *0$$

***[a* reprezintă baza zece). Este atunci natural să căutăm succesiv**

$$«1 = \qquad Vi = \qquad V_2 = X_{n\_}{}^{\wedge n} \sim^2, ...$$

unde *n* este cunoscut în funcţie de numărul de cifre al lui *N* pe baza inegalităţii

$$a^{2n} < .V < a^{2n+2}.$$

în fine, expresiile de tipul

$$2u_x v_x = 2x_n x_{n\_1} a^{2n} \sim^1 \text{ şi } t/_x(2u_x + v_x) = (2x_n a + a:_{n\_x})a:_{n\_x}«^{2n-2}$$

se calculează imediat, fiindcă x_t sînt cifre, iar înmulţirile cu *a>* se fac scriind *j* zerouri la dreapta numerelor.

în fapt însă scrierea se abreviază omiţînd zerourile inutile (ca la împărţire), aşa că se „coboară tranşe de cîte 2 cifre“ (în loc de a coborî cifrele una cîte una).

Adăugăm că pentru a efectua calcule care cuprind multe operaţii, printre care şi extragerile de rădăcini pătrate, se folosesc tabele numerice, sau instrumente (rigle de calcul). Studiul de mai sus este totuşi util în cazurile simple. El prezintă interes, în principal, prin aceea că arată în ce mod, la efectuarea unui calcul în sistemul zecimal, este folosită structura însăşi a operaţiei care trebuie efectuată .

III. Criterii de divizibilitate

Se numesc aşa regulile care dau restul împărţirii unui număr scris în sistemul cu baza *a* (pentru noi, *a* = zece) cu un divizor scris în acelaşi sistem, şi aceasta fără a căuta cîtul. Vom folos teoremele cunoscute referitoare la congruenţe şi divizibilitate care sînt independente de sistemul numeraţie.

1) DIVIZORUL ESTE O PUTERE A BAZEI: $d = a^n$. Fie N numărul dat; ştim că restul H_n este numărul format de cele n cifre de la dreapta lui N.

Dacă divizorul d' este un divizor al lui a_n,

$$N == R_n, \pmod{a^n}$$

implică

$$N = R_n, \pmod{d'}$$

aşa că este suficient să împărţim pe R_n la d'.

EXEMPLE: a = zece, 10 = 2 X 5. Restul împărţirii unui număr cu 2 sau cu 5 este restul cifrei care indică unităţile (prima din dreapta).

IO^2 = 4 X 25 = 2 X 50 = 5 X 20. Restul împărţirii unui număr cu 2, sau cu 4, sau cu 5, sau cu 25, sau cu 50, este restul numărului format din cele două cifre din dreapta. Regula nu este însă realmente utilă decît pentru 4 şi 25, fiindcă pentru 2, 5, 10, 20 şi 50 avem reguli mai eficiente.

2) $d = a - 1$ SAU UN DIVIZOR AL LUI $a - 1$. (Pentru a = 10, d este 9 sau 3).

De la

$$\text{« } = 1 \pmod{d}$$

trecem la

$$a^h = 1 \pmod{d},$$

prin urmare

$$x_h a^k = r_h \pmod{d}.$$

Adunînd membru cu membru congruenţele relative la diferitele valori ale lui k, conchidem: *un număr este congruent* (mod d) *cu suma cifrelor sale.*

în practică, pe măsură ce se calculează suma cifrelor, imediat ce se obţine un număr care depăşeşte baza, el este înlocuit cu $_s$uma cifrelor sale, iar cifrele care sînt multipli de d sînt neglijate.

3) DIVIZIBILITATEA CU UN NUMĂR DE FORMA d = a^n — 1 ŞT CU DIVIZOR1I UNOR ASEMENEA NUMERE. Numărul *N* trebuie descompus în tranşe de cîte *n* cifre.

EXEMPLU: *n* = 2.

IO^2 — 1 = 99. Pentru *d* putem lua valorile 99, sau 11, sau orice alt divizor al lui 99.

Fie *N* = 38 956. Scriem

$$3\text{-}10^4 = 3\ 1$$
$$89\text{-}IO^2 = 89\ |$$

prin urmare

N = (3 + 89 + 56) = 148 = 1 + 48 = 49.

Restul împărţirii lui 99 este deci 49; iar restul împărţirii la 11 este 49—44 = 5.

Deoarece a^2 — 1 = (a — 1) (a +1), cele de mai sus ne dau automat o regulă valabilă pentru *a* 4~ 1, dar putem găsi o regulă ceva mai simplă în felul următor:

4) DIVIZIBILITATEA CU d *= a+ 1. De la a = — 1* (mod *d),* trecem la

$$1\ a^{2ft} = +l, \qquad a^{2ft+1} = — 1$$
$$1\ x_{ik}a^{2h} = + x_{2k},\ x_{2k+1}a^{\wedge+1} = — z_{2ft+1}$$

prin urmare *N* este congruent cu numărul obţinut scăzînd din suma cifrelor de rang impar suma cifrelor de rang par, rangurile fiind socotite de Ia dreapta la stînga.

REMARCĂ GENERALĂ. în realitate, numai cazul resturilor nule prezintă un interes practic pentru simplificarea anumitor calcule, în particular pentru simplificarea fracţiilor. Tocmai de aceea nu vom studia, de exemplu, resturile împărţirii la *a* -ţ- 2 = 12, ceea ce s-ar putea face fără dificultate pornind de la 10 = — 2.

într-adevăr, noi putem prevedea condiţia ca restul să fie nul făcînd descompunerea 12 = 3 x 4, şi acesta este singurul caz realmente util în practică.

REMARCĂ. Vom vedea, după ce vom studia fracţiile, că nume- raţia este extrem de importantă şi din punct de vedere teoretic, pe lîngă importanţa ei practică, greu de supraestimat: „inventarea numeraţiei zeciirx le este faptul poate cel mai important din istoria ştiinţelor" (H. LEBESGUE).

§7. ALGORITMUL LUI EUCLID. FRACŢIILE DE MĂRIMI

I. Algoritmul lui Euclid in mulţimea întregilor

Revenim la § 1 şi la § 2 referitoare la împărţire. Vom introduce un algoritm, adică un procedeu sau un mod de operare, care va fi aplicabil la toate mulţimile în care va fi definită o împărţire cu cit *întreg*

$$a - bq + r$$

şi în care există o relaţie de ordine care dă sens inegalităţii *r < b-*

Aplicîndu-1 la mulţimea întregilor, el ne va conduce la no* demonstraţii ale teoremelor din § 3.

Apl icîndu-1 la mărimi, vom introduce fracţiile de mărime şi raportul a două mărimi de aceeaşi specie. Intr-un capitol următor, îl vom aplica la polinoamele cu o nedeterminată.

Algoritmul constă în a face împărţiri succesive în care perechea deîmpărţit-împărţitor este înlocuită cu perechea împărţitor-rest:

$$a = bq + r, \qquad r < b$$

$$b = rqi + n, \qquad r_i < r$$

$$r = r19z + r2 \qquad r_2 < r_i$$

---

n_i r*ntfn+i "1" r*n+i ^n+i < J

Problema care se pune este de a şti dacă algoritmul se termină la o anumită etapă. Singura circumstanţă care poate opri algoritmul este apariţia unui rest nul. Dacă r $_x$ =0, ultima împărţire este

L'J-1 $^{=r}$**p7p+i-**

1N CAZUL ÎNTREGILOR POZITIVI, şirul descrescător

$$b > r > ?T > r_2 \ldots > r_n > \ldots$$

este, în mod necesar, finit; prin urmare operaţia se opreşte; deci, se găseşte un rest nul; fie $r_{p+1} = 0$. Ne concentrăm atenţia asupra ultimului rest nenul $r_p = d$.

1) Lista completă a divizorilor comuni lui *a* şi *b* coincide cu lista divizorilor lui *b* şi r, deci cu cea a lui *r* şi r$_1$; prin urmare,

din aproape în aproape, cu cea a lui r_{p_x} şi r_p, listă care este cea a divizorilor lui $r_p = d$, de unde concluzia:

Ultimul rest nenul al algoritmului lui Euclid este cel mai mare divizor comun, iar divizorii comuni sînt divizorii acestui cel mai mare divizor comun **(abreviat C.M.M.D.C. sau c.m.m.d.c.).**

Dacă cel mai mare divizor comun este 1, spunem că *a* şi *b* sînt *prime între ele* (sau *relativ prime).*

2) Proprietăţi ale celui mai mare divizor comun. Deoarece *d* se obţine printr-un şir de relaţii liniare, înseamnă că *dacă înmulţim pe a şi pe b cu un acelaşi întreg* X, toate resturile succesive se înmulţesc cu X şi deci la fel se întîmplă şi cu cel mai mare divizor comun. Dacă, din contră, împărţim pe *a* şi pe *b* cu unul din divizorii lor comuni, toate resturile, inclusiv *d,* se împart cu acel număr. în particular, dacă împărţim cele două numere cu divizorul lor comun cel mai mare, citurile sînt prime între ele, de unde — enunţul important: *Caracteristica celui mai mare divizor comun faţă de ceilalţi divizori comuni este faptul că citurile împărţirii numerelor cu acest divizor sînt prime între ele.*

APLICAŢIE. Teoremă fundamentală. *Dacă un număr divide un produs de* DOI *factori şi este prim cu unul din ei, îl divide pe celălalt.* Ipoteza 1) *d* | *ab*

Ipoteza 2) c.m.m.d.c. *(d,* a) = l<=^c.m.m.d.c. } →

(db, ab) = b **fiindcă, deoarece *d* divide pe *db* şi pe *ab,* el divide şi divizorul lor comun cel mai mare, care este *b.***

Consecinţa 1. STUDIUL MULTIPLILOR COMUNI AI LUI *a* ŞI *b.*

Fie un multiplu comun p = *aa' = bb'* şi *d* cel mai mare divizor comun al lui *a* şi *b:*

***a = da", b = db"*, c.m.m.d.c. (a", *b")* =1.**

înlocuind în expresiile lui p, obţinem

p =*da'a" =db'b"* de unde *a'a" = b'b".*

Dar *a"* este prim cu *b",* prin urmare îl divide pe *b',*

3q, b' =a"q, de unde rezultă

a = b q,

şi prin urmare

Invers, orice număr p. care verifică o asemenea egalitate unde ■*q* este un întreg oarecare este un multiplu comun fiindcă egalitatea se scrie

p. = *ab"q — ba"q.*

Prin urmare, *cel mai mic multiplu comun este m = da"b" = = ab" = ba" şi multiplii comuni sînt multiplii acestui număr m.*

Mai mult, deoarece citurile împărţirii lui *m* la *a* şi la *b* sînt ■*a"* şi *b",* înseamnă că *cel mai mic multiplu comun a două numere se deosebeşte de ceilalţi multipli comuni prin faptul că citurile împărţirii lui la a şi la b sînt prime între ele.*

Consecinţa 2. UNICITATEA DESCOMPUNERII ÎN FACTORI PRIMI

Dacă un număr *prim* divide un produs de *doi factori primi* şi dacă nu este egal cu unul din ei, el este prim cu acel număr şi deci este egal cu celălalt.

Fie atunci un produs de *n* factori primi *ptfz ... p_n* despre care presupunem că este multiplu al unui număr prim *p.* Dacă *p =f= p_l, p* divide pe *p_2p_3 ... p_n.* Dacă nu este egal cu *p_2,* îl divide pe p_3 .... *p_n* şi aşa mai departe, dacă *p* nu este egal cu nici unul din primii *n*— 1 factori, el este egal cu ultimul, factorul *p_n.* Prin urmare, *dacă un număr prim divide un produs de factori primi, el este egal eu unul din ei.*

Fie atunci o dublă descompunere a unui număr în factori primi

P1P2 *Pn =* •••

Deoarece *p±* divide acest număr, el figurează în membrul al doilea, ■ceea ce permite o simplificare. Dar în felul acesta se poate simplifica cu toţi factorii primi din stînga, şi cum 1 nu este egal cu un produs de întregi neegali cu 1, înseamnă că în final nu rămîne nici un factor; prin urmare descompunerile erau identice.

Prin aceasta unicitatea este demonstrată.

Consecinţele acestei unicităţi au fost expuse în capitolul precedent; nu revenim asupra lor.

3. Studiul idealului mulţime a numerelor *xa -/- yb,* unde *x* si *y* sînt întregi de semne oarecare.

a) Algoritmul lui Euclid dă o soluţie a ecuaţiei *xa -/- yb —d,* •cînd *d* este cel mai mare divizor comun al lui *a* şi *b.* într-adevăr, resturile *r,* $r_{1(}$ r_2, ... , r_{p_lt} r_p pot fi eliminate din egalităţile algoritmului. începem cu r_p = *d,* de unde deducem

d (4" *r p-2′* insă $r_{p\_ţ}$ (*Qp-zfrp-z* 4" *r p-&*

prin urmare

d = *x p-2 r p-2* 4“ l/p-3 r p-3> msă $r_{j;\_2}$ = (*^p-ş^p-a* 4“ *r p-t*

prin urmare

d = *x p-3 r p.-3* 4- *yp-î r p_i*

şi aşa mai departe, numerele *x* şi *y* obţinîndu-se exclusiv din citurile q_i- Vom găsi în final, mergînd de la coadă spre cap,

d = x_o*a* + y_o*b.*

în particular, dacă *a* şi *b* sînt primi între ei, algoritmul dă o pereche de întregi, pozitivi sau negativi, rr_0, y_o astfel încît

1 = x_o*a* + y_o*b.*

Aşadar, orice multiplu al lui *d* este de forma *xa + yb;* dar orice număr de această formă este un multiplu al lui d, fiindcă d divide pe *a* şi pe *b.* Prin urmare, *idealul* <7 *coincide cu mulţimea multiplilor lui d;* este exact teorema care a fost demonstrată direct în capitolul precedent pentru un număr oarecare de termeni *a, b, ...* ,

6JREZOLVAREA ECUAŢIEI *xa + yb =c* ÎN NUMERE ÎNTREGI (ecuaţie diofantică).

Am văzut mai sus că problema nu este posibilă decît dacă *c* este un multiplu al c.m.m.d.c. al lui *a* şi *b.* Să

împărţim cu acest număr d; obţinem *xa′ + yb′* = c', cu *a′* şi *b′* primi între ei. Algoritmul lui Euclid dă o pereche A′ₒ, Vₒ care verifică

***XₒaI + YₒbI* = 1, de unde rezultă (XₒcI)aI + *(YₒcI)bI* = cI»**

Cunoaştem deci o soluţie particulară

$$.T_0 = A_oc\ ,\ y_0 = Y_oc$$

a ecuaţiei *xa′ + yb′ = c′.*

Căutarea soluţiei generale. **Eliminăm c' între egalităţile *xa′ + yb′ = c′* şi *xₐa′ + y^b′ = c′.***

Obţinem

***(x — x_g)a′ = — (y — y_0)b′,* cu *a′* şi *b′* primi între ei»**

Pe baza teoremei fundamentale, ştim să deducem de aici

$$3k : x - x_0 = kb',\ y - y_0 = -ka'.$$

Invers, oricare ar fi *k* (întreg), formulele acestea dau evident o soluţie; ele dau deci soluţia generală.

CONCLUZIE. Ecuaţia diofantică nu are soluţii decît dacă *c* este multiplu al c.m.m.d.c. al lui *a* şi *b;* aceste soluţii sînt date de formulele

$$x = x_0 + kb',\ y = y_Q - ka',$$

unde *k* este un întreg oarecare, *x₀* şi *y₀* constituie o soluţie particulară (dată, de exemplu, de algoritmul lui Euclid), iar *a′* şi *b′* sîntcîturile împărţirii lui aşi *b* la divizorul lor comun cel mai mare.

REMARCĂ. Sub o altă formă, ecuaţia diofantică se scrie *ax* = = c(mod *b).* Dacă modulul *b* este prim, obţinem o soluţie unică mod *b.* Tn particular, dacă *b* este prim şi *a* este dat nenul, congruenţa *ax* = = 1 (mod *b)* are o soluţie (mod *b)* în *x.* Aceasta înseamnă că *inelul claselor de resturi de modul b prim este un corp.* Acest corp are un număr finit de elemente: *b* elemente.

II. Algoritmul lui Euclid în mulţimea mărimilor

Să definim o împărţire euclidiană în mulţimea mărimilor de o specie dată; numai citurile vor fi numere, numere întregi pozitive.

EXEMPLU 1. Lungimea segmentelor rectilinii. Operaţia fizică „pus la capătul lui“ defineşte *adunarea G =G_X* —|— G_2, de unde rezultă *înmulţirea cu un întreg.* Semnul = reprezintă simbolic relaţia de echivalenţă „are aceeaşi lungime" definită cu ajutorul experienţei de suprapunere. Relaţia de ordine „este mai mare decît" — în cazul de faţă, „este mai lung decît" — relaţie de ordine totală, *G* >G_1; este definită cu ajutorul unei experienţe care dă în acelaşi timp diferenţa G — G_x, operaţie inversă adunării. Ea conduce la introducerea mărimii nule (sau de lungime nulă) pe care o vom nota cu *o.* Fizica afirmă că aceste operaţii au proprietăţile obişnuite de comutativitate şi asociativitate.

EXEMPLUL 2. Masa unui corp. Operaţiile cu balanţa dau dicţionarul:

G = G_X: puse pe rînd pe un platan al balanţei, corpurile au acelaşi efect din punctul de vedere al echilibrului;

G = G-L + G₂ : G **are acelaşi efect ca Gj şi** ***G₂*** **puse simultan pe- un platan;**

etc

O mărime fizică este definită de descrierea unei operaţii care permite întocmirea dicţionarului respectiv, cu garantarea proprietăţilor dorite, ceea ce face din mulţimea mărimilor ***G*** **de această specie un** ***modul,*** **cu inelul întregilor drept mulţime de operatori.. Ipotezei existenţei relaţiei de ordine totală îi adăugăm ipoteza:** ***mulţimea satisface axioma lui Arhimede.*** **Amintim că această axiomă' afirmă că oricare ar fi mărimea** ***G*** **dată, şirul multiplilor G_1,$2G_1$,.... ..., nG_1, ... depăşeşte pe G, oricare ar fi mărimea** ***G₁.*** **Rezultă de-aici că oricare ar fi perechea G, G_x, (G >** ***Gfj,*** **este definită împărţirea euclidiană**

3<7I **întreg pozitiv:** ***qfi*** $_v$ **<G< + 1)** ***G*** $_{\pm}$

restul împărţirii fiind

G₂ **— G — 9iG** $_{lţ}$ **diviziune care este definită şi prin**

G = ^Gj + G₂, G₂ < ***Gx.*** (i

Vom folosi, de asemenea, inegalitatea

G₂ G — Gi care rezultă din <7 $_X$

1, de unde

2G₂ < G

Pornind de la G şi G_x**, G > G** $_x$**, deducem aşadar algoritmul Inii Euclid**

G = ***q-fi-L*** **+ G₂** GJ **=** ***q₂G₂*** **+ G₃**

G > Gj > G₂ > ... > ***Gn > ...***

Gn tfn+fin+i **4" ^n** $_+$**2**

unde şirul de operaţii nu se opreşte decît atunci cînd se găseşte urs rest nul, dacă se găseşte un asemenea rest.

Să oprim calculul după ce l-am introdus pe G_p. Aşa cum am văzut în cazul întregilor, există o pereche de întregi pozitivi sau negativi x_p , y_p astfel încît $x_pG + y_pG_{\pm} = G_p$. Avem însă nevoie să facem unele precizări; de aceea, să reluăm calculul. (Literele minuscule reprezintă *întregi pozitivi.)*

$$Gp = Ip\text{-}fip\text{-}I + G_{p\_2}\text{-}$$

însă

$$Gp\_j \qquad îp\text{-}'Gp\text{-}o + {}^{C}P\text{-}3'$$

prin urmare

$$Gp = 4" (?p\text{-}l?p\text{-}2\ 4" l)Gp\_2\ îp\text{-}l\hat{}p\text{-}S$$

$$= + {}^{s}p\text{-}fip\text{-}2\ \hat{}P\text{-}3\hat{}P\text{-}3"$$

însă

$$Gp\text{-}2 = \quad ?p\text{-}3\hat{}p\text{-}3\ 4" \hat{}p\text{-}4'$$

prin urmare

$$Gp = \quad ({}^{S}P\text{-}2?P\text{-}3\ 4\sim\ \hat{}P\text{-}3\hat{}P\text{-}3\ 4\text{-}\ {}^{s}p\text{-}4\hat{}p\text{-}f$$

$$\sim \quad {}^{s}p\text{-}3\hat{}p\text{-}3\ T\ \hat{}p\text{-}fip\text{-}4$$

şi aşa mai departe, aşa că

$$Gp = 4" {}^{s}p\text{-}2<t\hat{}'p\text{-}2h \qquad 4\ \text{-}2k\text{-}fip\text{-}2k\text{-}l >$$

$$Gp = \quad {}^{s}p\text{-}_{2}h\text{-}fip\_2h4" \hat{}p\sim 2A\_2Gp\_2fe\_2$$

în funcţie de paritatea lui *p,* obţinem deci

$$G_p = ctpG — \text{fepGj sau } G_p = — a_pG \text{ -ţ- } b_pG_t.$$

în afară de aceasta, dacă alegem succesiv indici *p* crescători^ întregii a_p şi b_p construiţi prin adunarea unor numere întregi pozitive *cresc ţi tind către infinit* dacă *p* tinde către infinit, cu condiţia să nu fi survenit un rest nul.

Pe de altă parte, din inegalităţi de tipul (i^z), rezultă că şirul resturilor verifică

$$G >■ 2G_2 > 2^2G_4 > \ldots > 2^{fe}G2k > \ldots$$

$$G_4 > 2G_3 > 2^2G_5 > \ldots > 2*G_{2k+1} > \ldots$$

Prin urmare, dacă nici unul din resturi nu este nul, restul G_p tinde către *o* cînd *p* tinde către infinit: într-adevăr, conform axiomei lui Arhimede, dacă toţi G_p ar

rămîne mai mari decît o anumită mărime T ar exista un întreg *k* astfel încît

$$2*G_h > 2"r > G$$

ceea ce ar contrazice inegalităţile scrise.

Acestea odată stabilite, trebuie evident să distingem două cazuri, în cadrul unui studiu teoretic în care considerăm că nici un G_k nu este neglijabil:

***Primul caz.* UN REST ESTE NUL. $G_p = o.$ Algoritmul lui Euclid se opreşte; există deci o pereche de întregi a_p, b_p, pe care, pentru simplificare, îi vom scrie *a* şi 6, astfel încît $aG = bG_t.$**

Să precizăm lucrurile, făcînd calculele în celălalt sens:

G = q_1G_1 + G_2 = *(qrfz* + 1) G_2 + G_3 = ... = c_nG_n -j-G_{n+1} = ... =

$^{=cG}p_{-l}$

fiindcă G_p este nul.

în mod analog,

$$Gi = qfiz + G_3 = \ldots = dG_{p\_1}$$

Aşadar, *G* şi G_x sînt mărimi multipli ai lui $G_{;)\_1}$ = T, ultimul rest nenul. Spunem că T *este o parte alicotă comună lui G şi G_1.* Despre două mărimi care au o parte alicotă comună spunem că sînt *comensurabile* între ele.

Avem

$$cd\ r = dG = cG_x,$$

dar am introdus $aG = bG_t$, prin urmare

$$ac\ G = bd\ G = bc\ G_{lf}$$

aşa că

$$ac = bd.$$

Convenim să scriem

$$r = \frac{G}{c} = \frac{G_1}{d}.$$

însă, ca şi în cazul întregilor, oricare ar fi întregul X, XG şi XG_x conduc la Xr cu aceleaşi cîturi, prin urmare cu aceleaşi numere *a* şi *b* şi avem

G = .r - ± («GJ =«(X_{G1})

-expresie pe care o vom scrie *(cjd)G_1.*

Pentru a stabili că *c/d = bja* decurge ca o consecinţă a egalităţii *ac = bd* trebuie — aşa cum rezultă din modul în care a fost introdus c/d — ca (l/fe)G să fie o mărime T'. Trebuie, prin urmare $_f$ să introducem pentru mărimi AXIOMA CONTINUITĂŢII: *oricare ar fi întregul n, există o mărime* T' *astfel încît* ni$^{1'}$ = *G.*

Atunci simbolurile *c/d* şi 6/a introduse au proprietăţile care definesc fracţiile şi numerele raţionale (Cartea I). *Mărimile formează un spaţiu vectorial cu corpul numerelor raţionale ca mulţime de operatori.*

Numărul raţional reprezentat de *c/d* şi *b/a* se numeşte *raportul* mărimilor *G* pe G_x. Raportul G_x pe *G* este *dţc.*

(Fireşte, dacă privim lucrurile istoric, noţiunea de raport de mărimi comensurabile între ele este cea care a dus la noţiunea de fracţie... .)

Deseori raportul se notează

$$\frac{G}{G_j}\quad\frac{c}{d}\qquad\frac{Gi}{G}\quad\frac{d}{c}$$

Din motive tipografice, noi vom scrie şi *G/G^*

Algoritmul lui Euclid conduce, în cazul considerat, la o parte alicotă comună T care este cea mai mare posibilă, fiindcă orice parte alicotă comună lui *G* şi G_x aparţine şi tuturor resturilor G_n pînă la restul nul (exclusiv); ele sînt deci — toate — părţi- alicote ale lui T, prin urmare sînt

r,—r — r t —- r,

***Cazul al doilea.* ORICARE AR FI *p,* RESTULG_p NU ESTE NUL. Atunci G şi G_x *nu au părţi alicote comune* fiindcă, pentru un *p* suficient de mare, $G_p = \pm (a_pG —$ *bpGf)* devine mai mic decît orice mărime aleasă, în timp ce dacă ar exista o parte alicotă comună, el ar fi un multiplu al acesteia.**

Putem oare defini, în acest caz, un aşa-numit „raport G pe G_x“,. folosind un procedeu de completitudine (extindere)? Păstrăm, evident, axioma continuităţii, aşa că putem scrie

$$-G_P = \pm [G-^Gj.$$

Ştim că a_p tinde către infinit şi G_p tinde către mărimea nulă cînd p tinde către infinit. Prin urmare, dacă $f_p = b_p/a_p$ are o-

limită p în aceste condiţii, va trebui să scriem $G = pG_x$; raportul G pe (?! va fi un număr real neraţional. Să vedem deci cum variază f_p cu numărul p:

$$\frac{1}{a_p} G_p + \frac{1}{a_{p+1}} G_{p+1} = (f_{p+1} - f_p) G_1$$

$$-G_p = G \quad - fpGi, \quad - G_{p+1} - - G + f_{p+1} G_1$$
$$pp+i$$

$$\hat{}\text{-}G_{P+i} \quad = G - fp+fi\hat{}$$
$$u p+2$$

Plin urmare,

$$-G_{P+1} + \underset{a_{p+2}}{L} G_{p+2} = (f_{p+1} - fp\hat{}G.$$
$$a_{r+i}$$

$$-Gp\text{---} G_{P+2} = (f_{p+i} - fp)Gi, \text{ cu } \begin{matrix} Gp+2 < G_p \\ a_{p+2} > a_p \end{matrix}$$
$$a_p \qquad p+2$$

şi avem deci

$$f_p < f_{p+2} < f_{p+3} < f_p$$

oricare ar fi întregul p.

Numerele raţionale f_p determină aşadar intervale cuprinse unele în altele, ale căror lungimi tind către 0. Ştim deci că şirul lor are o limită, un număr real p, fracţiile ele însele fiind aproximaţii, alternativ prin lipsă şi prin exces, ale lui p.

Convenim şi acum să scriem $G = pG_x$ şi $G/G_x = p$. Deoarece p este *iraţional, G* şi G_x sînt *mărimi incomensurabile intre ele.*

Prin urmare, algoritmul lui Euclid dă, în fiecare etapă, valori raţionale aproximative ale raportului a două mărimi, indiferent dacă mărimile sînt sau nu comensurabile între ele.

Să remarcăm că deoarece simbolul G/Gx are acum sens în toate cazurile, putem scrie:

Simbolul care se introduce astfel: $\frac{G}{G_1} = q_1 + \frac{G_2}{G_1} = q_1 + \frac{1}{G_1/G_2} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{G_2}{G_3}} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\frac{G_2}{G_3}}} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{G_3/G_4}}}$ etc.

*7i

1

îa H---;---

+ • • •,

indiferent că este sau nu limitat, se numeşte *fracţie continuă.*

Acest simbol, se înţelege, a avut o importanţă considerabilă în studiul numerelor despre care se bănuia că ar fi iraţionale, în particular al numărului *-n* (Lord BROUNCKER, 1620—1684. LAMBERT, 1728—1777). Vezi, de exemplu, H. Lebesgue, *Les constructions- geometriques,* Gauthier-Villars.)

Din punct de vedere practic şi nu teoretic, toate experienţele se fac cu o anumită aproximaţie: resturile G_n care descresc şi tind către 0 sfîrşesc prin a deveni de ordinul de mărime al erorilor. Operaţia este oprită deliberat la ultimul rest mai mare decît erorile experimentale şi acest rest este folosit ca parte alicotă comună aproximativă. Numai în cazul în care *G* şi G_x au o definiţie teoretică una în raport cu cealaltă, ne putem pune întrebarea dacă aceste mărimi sînt sau nu comensurabile între ele. Ştim că în cazul laturii pătratului şi al diagonalei acestuia, mărimile nu sînt comensurabile. Algoritmul lui Euclid (mai exact ar fi să spunem algoritmul lui Eudoxus) ne permite să înlocuim raportul iraţional (despre care cei vechi gîndeau că nici nu există) cu un şir de numere raţionale care îl aproximează cu o precizie oricît de bună.

REMARCĂ: MĂSURA ZECIMALĂ A MĂRIMILOR. După introducerea numeraţiei zecimale, noţiunea de fracţie şi-a pierdut mult din importanţa ei practică. Oricare ar fi mărimea *G,* se poate alege orice mărime *U* suficient de mică, pentru a fi fo'osită ca parte alicotă aproximativă, fiindcă în împărţirea $G = qU + G'$, G' este mai mic decît *U* şi deci, este practic neglijabil. Se adoptă atunci o familie de unităţi

$$U_0, \quad \frac{1}{10} U \qquad \frac{1}{10^2} U \quad \ldots, \frac{1}{10^n} U_0 = U_n,$$

Măsura lui *G* cu unitatea fundamentală U_o devine un număr zecimal, aşa că o schimbare de unitate înseamnă pur şi simplu, separarea unei părţi zecimale în raportul întreg GjU_n.

CAPITOLUL 2

FRACŢII. NUMERE RAŢIONALE NUMERE ZECIMALE

Am introdus (Cartea I, Structurile fundamentale) numărul raţional ca o *clasă de echivalenţă,* considerînd că două fracţii *a/b* şi *a'/b'* sînt echivalente dacă *ab' = ba'.*

I. Fracţii

Teorema fundamentală a teoriei numerelor întregi conduce Ia teorema fundamentală a teoriei fracţiilor:

Teoremă fundamentală. *Dacă o fracţie are ca termeni întregi primi între ei, orice fracţie echivalentă cu ea are ca termeni echimultipli ai acelor întregi.*

într-adevăr, din ipotezele

$$\begin{matrix} 1\ ab' = ba' \\ \text{î} \bullet \quad \bullet\ \bullet \quad \bullet \\ (\ a \text{ şi } b \text{ primi între ei} \end{matrix} \qquad (1)$$

rezultă, pe baza teoremei fundamentale a teoriei întregilor, că, deoarece *a* divide pe *ba'* şi este prim cu *b,*

a îl divide pe a':

$$3/c : a' = ak,$$

de unde, pe baza lui (1),

$$b' = bk.$$

O fracţie ai cărei termeni sînt primi între ei se numeşte *fracţie ireductibilă. Orice număr raţional are un reprezentant şi numai unul singur care este o fracţie ireductibilă.* El se obţine plecînd de la una oarecare din fracţiile clasei, împărţind cei doi termeni ai acesteia cu divizorul lor comun cel mai mare.

într-un studiu teoretic se presupune totdeauna că numărul raţional este reprezentat prin fracţia lui ireductibilă. De asemenea, pentru a aduce fracţiile la *cel mai mic numitor comun,* se presupune că fracţiile au fost mai întîi reduse: numitorul căutat este atunci cel mai mic multiplu comun al numitorilor fracţiilor.

REMARCĂ. în introducerea la numerele iraţionale (Cartea I) am folosit într-un caz particular teorema:

***Pătratul unui număr raţional neîntreg nu este un întreg.* Aceasla teoremă este generală; într-adevăr, fie a/b fracţia ireductibilă care reprezintă numărul dat, unde b nu este egal cu 1; pătratul ei, a^2/b^2, este şi el ireductibil, fiindcă termenii lui, întocmai ca a şi b, nu au factori primi comuni; iar deoarece numitorul nu are valoarea**

I, înseamnă că fracţia nu este egală cu un întreg. De unde enunţul sub forma:

Orice întreg care nu este pătratul* (sau puterea a n-a) *a unui întreg, nu este nici pătratul* (sau puterea a n-a) *a unui număr raţional.

Un număr raţional este pătratul* (sau puterea a n-a) *a unui alt număr raţional dacă şi numai dacă cei doi termeni ai fracţiei ireductibile care îl reprezintă sînt ei înşişi pătrate* (sau puteri a n-a) *de întregi.

II. Fracţii zecimale

Numeraţia adoptată fiind cea zecimală, puterile lui

10 sînt numere remarcabile. Completăm şirul 10, 10^2, 10^3, ... al puterilor de exponenţi pozitivi, cu şirul puterilor de exponenţi negativi definiţi prin

$$10\text{-}i = 1, \quad io^{-2} = \frac{}{10} = \frac{}{10^2} = \frac{}{100}, \quad IO'^3 = \frac{}{10^3} = \frac{}{1000}, \quad \ldots$$

şi îi mai adăugăm şi

$$10» = 1.$$

Convenţia de bază a numeraţiei de poziţie: deplasarea cifrelor cu n ranguri spre stînga echivalează cu înmulţirea numărului cu 10^n, conduce la a scrie cifre la dreapta cifrei unităţilor, dacă vrem să împărţim la 10^n, adică să înmulţim cu $l/10^n$; de unde notaţiile

$$10^{-1} = \frac{1}{io'} = 0.1, \quad IO'^2 = \frac{}{10^2} = 0{,}01, \ \ldots$$

Se numeşte *fracţie zecimală* o fracţie al cărei numitor este o putere a lui 10.

Fie o fracţie zecimală p = V/10^p, expresia lui *N* în numeraţia zecimală fiind

$$N = x_n 10^n + \hat{}_{n\_x}\, 10^{n\text{-}1} + \ldots + a?il0 + x_0.$$

Fracţia capătă reprezentarea zecimală

$$f = x_n 10^{n\sim p} + a;_{n\_1} 10^{n\text{-}2'\text{-}1} + \ldots + \hat{}10\text{-}P{+}I + rr_o 10\text{-}^p.$$

Dacă *N* nu este un întreg, atunci cel puţin unul din exponenţii ultimilor termeni (cei din dreapta) este cu siguranţă negativ, cei din stînga putînd fi pozitivi, negativi sau nuli. Vom separa cu o virgulă cifrele care corespund exponenţilor negativi, şi aceasta chiar cu preţul că vom pune un zero la stînga virgulei, dacă nu există termeni cu exponenţi pozitivi sau nuli:

$^n > p$	f— ••• ^1^0	ex: 342,50
$n = p \quad 1$	f — 0, $X_n\ X_{n\_}$ ^ ...	ex: $0{,}342^4$
$\overline{n} < p1$	f = 0,00 ... $0x_n x_n$-i • ■•$x_1 x_0$	ex: 0,00

Cifrele de la dreapta virgulei se numesc *cifre zecimale;* ele formează *partea zecimală* a lui *f,* în timp ce ansamblul cifrelor plasate la stînga virgulei

formează *partea întreagă* a lui *f.* Spunem atunci că fracţia zecimală *f* este scrisă sub formă zecimală.

REGULILE DE OPERARE cuformele zecimale se deduc, ca şi regulile de operare cu numerele întregi scrisesub formă zecimală, din proprietăţile de comutativitate, asociativitate, distributivitate în ceea ce priveşte adunarea, scăderea şi înmulţirea ; nu insistăm asupra detaliilor acestor reguli. Conchidem doar că *fracţiile zecimale constituie un inel,* ca şi întregii.

Dacă considerăm însă *împărţirea,* operaţia inversă înmulţirii, vedem că acest inel, ca şi cel al întregilor, nu este un corp: într-adevăr,

$$\text{o} = - \blacksquare \qquad = — v = iQP'\text{-}P$$
$$\text{ÎOP'IOP' 1CP } \rfloor\text{V'} \; N'$$

nu este, în general, o fracţie zecimală. împărţirea este imposibilă în inel, şi sîntem conduşi să introducem o nouă operaţie, analoagă împărţirii euclidiene (cu cît şi rest) introduse în inelul întregilor. Dacă *A* şi *B* sînt întregi, cîtul *Q* era definit prin

$$BQ\hat{}A<B(Q+1).$$

Păstrăm această definiţie

$$fl < b(Q + 1)$$

pentru fracţiile zecimale *a* şi *b* al căror cît exact este *a/b = q*| întregul *Q* va fi definit prin *Q <q<Q* + 1.

(De notat că aici cîtul exact este definit, ceea ce nu se întîmpla şi în cadrul studiului întregilor.)

Dar *q* este un număr raţional oarecare; prin urmare problema care se pune este de a plasa un număr raţioanl printre numerele întregi, sau, cum se spune, de *a extrage întregii dintr-un număr raţional.* într-o formulare mai generală, deoarece întregii pot fi consideraţi drept numere zecimale particulare, sîntem puşi în faţa problemei de *a plasa numerele raţionale printre numerele zecimale.*

III. Inelul fracţiilor zecimale în corpul numerelor raţionale

1) Număr zecimal. Spunem că un număr raţional este *număr zecimal* dacă una din fracţiile care îl reprezintă este o fracţie zecimală; dar atunci în aceeaşi clasă există o infinitate de fracţii zecimale, fiindcă putem înmulţi cei doi termeni ai fracţiei cu o putere oarecare a lui 10. Un număr zecimal nu se schimbă dacă scriem sau suprimăm zerouri la dreapta cifrelor zecimale, aşa cum nici un întreg nu se schimbă dacă scriem zerouri la stînga cifrelor lui semnificative. Cazul cel mai simplu alacestor fracţii zecimale este cel (unic) în care numărătorul nu are pe 0 ca cifră a unităţilor; forma zecimală a fracţiei nu se termină la dreapta cu un 0.

CONDIŢIA CA UN NUMĂR RAŢIONAL SĂ FIE NUMĂR ZECIMAL. Un număr raţional este determinat printr-o fracţie care-1 reprezintă. Presupunem această fracţie ireductibilă, eventual după simplificări. Fie aşadar un număr raţional dat prin fracţia

$$\frac{a}{b},$$ ***a* şi *b* primi intre ei.**

Deoarece orice fracţie egală cu ea are ca termeni echimultipli ai lui *a* şi *b,* condiţia necesară şi suficientă pentru ca numărul raţional să fie zecimal este ca *b* să aibă printre multiplii săi o putere a lui 10, prin urmare, ca *b să nu aibă alţi factori primi decît pe 2 şi* 5.

2) Valori zecimale aproximative ale unui număr raţional. Mulţimea numerelor zecimale este peste tot densă pe intervalul (0, -f- oo), fiindcă 1/10" tinde către 0 cînd *n* tinde către infinit, aşa că intervalele

Ob
loni (10" IO") ţlO" ton]

acoperă (0, J4) **oricare ar fi *A*, şi în acelaşi timp sînt toate de lungime mai mică decît e, dacă *n* este luat suficient de mare.**

***a)* Odată ales *n,* orice număr raţional r poate fi aproximat cu mai puţin de 1/10" prin două fracţii zecimale care îl încadrează,**

$$\frac{P}{10^{"}} \qquad \frac{P+1}{10^{"}}$$

şi care se numesc *valori zecimale care aproximează pe r prin lipsă şi prin exces pînă la* 1/10". întregul *p* se calculează imediat din remarca următoare:

Dacă *r* este dat printr-o fracţie —, definiţia
6

$$\frac{p}{10^{"}\ b} < JL < \frac{P+1}{10^{"}}$$

devine

$$bp\ a\ 10" < b!p + 1)$$

care exprimă că *p este cîtul întreg al împărţirii la b a întregului a* ■ 10".

t) Să dăm acum lui *n* valori întregi succesive: obţinem două şiruri de valori zecimale aproximative ale lui *r,* unul constituit din valori care îl aproximează prin lipsă, fie el şirul *S,* altul constituit din valori care îl aproximează prin exces, fie el şirul S'.

Să studiem şirul *S:*

$$\left\{ p_0 \ \ (\text{întreg}),\ \frac{p_1}{10},\ \frac{p_2}{10^2},\ \ldots,\ \frac{p_n}{10^n}\ \ldots, \right\}.$$

Ştim că p_n se calculează făcînd împărţirea

$$bp_n < a \cdot 10^{n} < b(p_n + 1)$$

sau, punînd în evidenţă restul,

$$a \cdot 10^n = bp_n + r_n,\ r_n < b.$$

Deducem de aici

$$a\text{-}\ 10^{n+}\text{i} = t(10p_n) + 10\ r_n.$$

Prin urmare, pentru a-1 obţine pe p_{n+1}, este suficient să împărţim 10 r_n la *b:*

$$10\ r_n = bs + r_{n+1},\ r_{n+1} < b,\ s < 10.$$

Atunci

$$alO^{n+1} = t(10p_n + s) + r_{n+l},\ \text{cu}\ r_{n+1} < b,$$

arată că

$$Pn_{+}1 = 10\ p_n + s$$

şi că este numărul care se scrie plasînd cifra .s la dreapta cifrelor care constituie numărul p_n.

Altfel spus, după ce am efectuat împărţirea de întregi care dă pe p_n, punem un zero Ia dreapta lui r_n şi continuăm împărţirea pentru a-1 obţine pe $p_{n+}T$ Dacă am plasat virgula pentru a scrie sub formă zecimală valoarea aproximativă $p_n/10^n$, virgula îşi păstrează poziţia şi $p_{n+1}/10^{n+1}$ se obţine scriind la dreapta o nouă cifră zecimală. Prin urmare, *şirul S al valorilor prin lipsă este crescător,* cu excepţia cazului în care toate cifrele care urmează să fie scrise sînt nule începînd cu un anumit rang. Situaţia aceasta trebuie examinată mai în detaliu.

PRIMUL CAZ. *Pentru o anumită valoare n, obţinem* $r_n = 0$. Operaţia se opreşte; valoarea $p_n/10^n$ obţinută este egală cu *ajb,* care reprezintă deci un număr zecimal.

CAZUL AL DOILEA. *Pentru nici o valoare n, nu obţinem* $r_n = 0$**. Aceasta înseamnă că nu există nici o fracţie zecimală care să fie egală cu *alb.* In acest caz, cînd continuăm operaţia, găsim în mod necesar cifre zecimale nenule de rang mai mare decît *n,* oricît de mare ar fi *n,* fiindcă scriind suficient de multe zerouri la dreapta unui rest nenul, obţinem deîmpărţituri parţiale care sfîrşesc în**

mod necesar prin a depăşi împărţitorul *b.* Operaţia continuă deci indefinit. Şirul S este format dintr-o infinitate de numere zecimale crescătoare obţinute scriind la dreapta lor cifre nu toate nule. Acest şir este mărginit de numărul raţional *a/b* care este limita lui, conform definiţiei unei limite (Cartea I, cap. 4, § 3).

Exemplu; a _ 21⁴ *b* ~

214 | 65

190 3,2|923076|92 ... -> 600

150

200

50

500

450

-> 600

150

20

Constatăm pe acest exemplu că găsim restul 60 care, după cobo- rîrea unui zero, dă deîmpărţitul parţial 600 şi că, dacă continuăm, regăsim acest rest 60: din acel moment, operaţia se repetă ; regăsim şirul cifrelor citului, precum şi resturile succesive. Legea care-determină cifrele citului fiind cunoscută, o reprezentăm simbolic punînd puncte de suspensie, şi citind „şi aşa mai departe". Numărul 923076 este *perioada,* iar despre numărul 3,2 care precede perioada spunem că formează *pa: tea neregulată.* Obţinem *un simbol zecimal periodic nelimitat.*

Acesta este cazul general:

Teoremă. *Daca o fracţie a/b nu este egală cu un număr zecimal,, ea generează un simbol zecimal*

periodic nelimitat.

într-adevăr, deoarece resturile sînt, toate, mai mici decît împărţitorul, ele sînt în număr limitat, aşa că operaţia nu poate continua la nesfîrşit fără să se regăsească un rest deja obţinut.

Să remarcăm că, după definiţia elementelor şirului S, toate fracţiile egale între ele generează acelaşi şir; prin urmare *orice număr raţional nezecimal generează un şir care are ca limită numărul considerat şi ale cărui elemente sînt numerele obţinute păstrînd* 1, 2,*n, ... cifre la stingă unui simbol zecimal periodic nelimitat pe care ştim să-l formăm. Spunem că şirul nelimitat este* EGAL *cu numărul generator.*

Reciproc, *orice simbol zecimal nelimitat periodic provine dintr-un număr raţional, cu excepţia cazului în care perioada este formată din cifra* 9.

într-adevăr, fie simbolul format din partea neregulată

$$a = a_1 a_2\ ^a k\hat{}i\hat{}2 \qquad > (^a \text{ poate fi şi nul})$$

şi din perioada

$$7ţ = {}^c l^c 2 \bullet \bullet \bullet {}^c p,\ ^c p \qquad b_n.$$

Condiţiile necesare şi suficiente referitoare la *a* şi *b* sînt următoarele :

Prima perioadă începe cînd s-a împărţit la *b* numărul întreg $10^h a$, operaţie care dă restul *R.* Perioada a doua va începe cu deîm- părţitul parţial format plecînd de la acelaşi rest *R* obţinut de data aceasta împărţind la *b* întregul $10^{h+p} a$. Or, ciurile acestor împărţiri sînt respectiv $10^h a$ şi $10^{h+p} a$ 4- 7t. Aceasta se exprimă prin

$$10^h a = fe(10^{ft} a) + R$$

$$10'^{**p} a = 6(lO^{h+p} oc + 7t) + R$$

de unde

$$(10^{'i+p} \_ 10h)a = t[10^{h+p} a - 10^h a],$$

prin urmare

$$\frac{a}{b} \sim \frac{(1Qh+Pq - r) - K\text{-}Ag}{10/i\ (1(P - 1)} = \frac{\text{TT}}{(1(|P -\ \sim}$$

(1 ţ b ... C2^-2 ••• p 1^2 • • • b^ b% • • ♦ bp

Numărul raţional căutat este deci clasa fracţiilor egale cu *a/b,* afară de cazul în care *a/b* este zecimal. Acest caz nu se poate realiza decît dacă toate cifrele lui tc sînt egale cu 9, adică dacă *p* = 1, tc = 9. O asemenea formă nelimitată este *forma improprie* a unui număr zecimal, care poate fi considerat, el însuşi, ca fiind nelimitat de perioadă egală cu 0. Astfel

1, 99 ... = 2 = 2,00 ... ; 5,399 ... = 5,4 = 5,400 ...

Concluzie. *Există o corespondenţă biunivocă între mulţimea numerelor raţionale ţi mulţimea formelor zecimale periodice nelimitate, dacă excludem o perioadă formată din cifra* 9 (sau, mai general, din cifra egală cu baza minus 1).

Acest rezultat se completează cu teorema următoare:

Teoremă. *Există o corespondenţă biunivocă intre numerele reale ţi formele zecimale nelimitate* periodice sau nu, dar cu excepţia consemnată mai sus.

1) Fiecărui simbol zecimal nelimitat îi facem să-i corespundă limita şirului de numere zecimale obţinut limitînd simbolul la 1, 2, ... , *n,* ... cifre zecimale. Dacă aceste cifre nu sînt toate nule începînd de la un anumit rang, şirul este crescător şi este majorat de numerele obţinute mărind cu 1 una din cifre (conform regulilor care determină relaţia de ordine în numeraţia de poziţie). Prin urmare, limita există şi se modifică dacă se modifică măcar una din cifrele simbolului.

2) Reciproc, orice număr real este limita şirului definit de un simbol zecimal nelimitat. într-adevăr, deoarece mulţimea numerelor reale este ordonată total şi arhimedeană, înseamnă că dacă *r* este dat, inegalităţile

$$\frac{Pn}{10^{n}} \le r < \frac{Pn+1}{10^{n}},$$

adică

$$Pn < r \cdot 10» < p_{n+1}$$

definesc perfect un întreg p_n.

Putem deci studia numerele reale după proprietăţile formelor zecimale nelimitate.

Fireşte, faptul că baza de numeraţie adoptată este *zece* nu intervine nicăieri în cele de mai sus. Baza cea mai remarcabilă este *doi* (numeraţia diadică); singurele cifre care trebuie introduse sînt 0 şi 1, ceea ce permite utilizarea unor calculatoare cu principiu de funcţionare foarte simplu: o căsuţă perforată (sau un curent care circulă) reprezintă 1, iar o căsuţă neperforată (sau un curent care nu circulă) reprezintă 0. Viteza foarte mare de operare a calculatoarelor face ca lungimea formelor diadice (de exemplu, numărul *o sută* se scrie 1 100 100) să nu constituie decît un inconvenient neglijabil. Cît priveşte din punct de vedere teoretic, baza *doi* pur şi simplu se impune ; uneori mai adecvată este baza *trei,* pe care o vom folosi în cap.3, § 1, II.

CAPITOLUL 3

NUMERE REALE

§ 1. PUTEREA SUBMULŢIMILOR DE NUMERE REALE

Ştim că unei mulţimi cu un număr finit de elemente i se ataşează un număr cardinal: numărul elementelor. Vom studia acum cîteva submulţimi ale numerelor reale care au o infinitate de elemente.

I. Submulţimi numărabile

Am spus (Cartea I, § 4) că o mulţime cu o infinitate de elemente este *numărabilă* dacă există o corespondenţă biunivocă între elementele ei şi cele ale mulţimii întregilor naturali 1, 2, ... , *n, ...,* altfel spus, dacă ele pot fi numerotate. Ele formează atunci un *şir.*

EXEMPLE. Mulţimea numerelor pare: numărul *2k* are numărul (de ordine) *k;*

Mulţimea pătratelor de întregi: numărul k^2 are numărul *k.*

Mulţimea întregilor de semne oarecare: *k* fiind un întreg pozitiv, atribuim numărului -ţ- *k* numărul *2k* şi numărului — *k* numărul *2k* + 1.

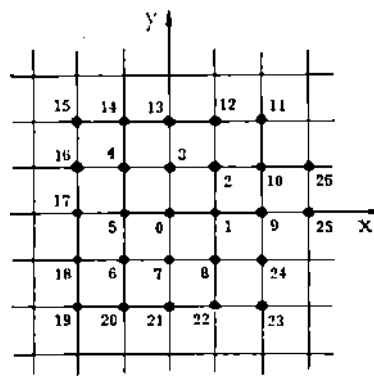
Mulţimea numerelor prime: Ştim să obţinem numerele prime unul cîte unul cu ajutorul ciurului lui Eratostene, prin urmare ştim să le numerotăm în acord cu ordinea lor crescătoare. Dar nu dispunem de o

formulă care să dea valoarea numărului prim căruia i se ataşează un număr *k* dat; vom spune că mulţimea numerelor prime este numărabilă, dar ea nu este numărată exact ca cele precedente.

Cîteva rezultate fundamentale şi care nu apar ca fiind la fel de evidente sînt următoarele:

Teorema 1. *Mulţimea perechilor de întregi este numărabilă.*

Sub formă grafică, reprezentăm perechile de întregi prin punctele cu coordonate întregi din plan. Dacă încercăm să le numerotăm



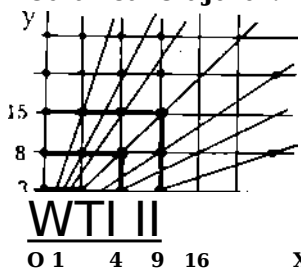
pe rînduri paralele de exemplu cu *ox,* este clar că utilizăm toţi întregii încă de cînd considerăm primul rînd, dar operaţia de numerotare poate fi efectuată şi altfel, de exemplu folosind pătrate cu centrul în origine, aşa cum se vede în schemă. în felul acesta fiecărui punct i se asociază un număr, şi invers. (Ca exerciţiu, operaţia poate fi analizată în detaliu, în particular se poate arăta că punctele de pe axa *x* au ca numere pătratele întregilor impari succesivi.) Rezultă, prin urmare, că nu putem spune că în plan există „mai multe puncte" decît pe *ox,* iar cînd două mulţimi cu o infinitate de elemente verifică relaţia de incluziune *E'* c *E",* nu putem spune că *E'* are „mai puţine elemente decît *E".*

Tot astfel, considerînd spaţii cu 3, 4, ..., *n*

dimensiuni, vedem în mod analog că reuniunea unui număr finit de submulţimi numă- rabile este o submulţime numărabilă. Se demonstrează că afirmaţia este valabilă şi pentru reuniunea unei infinităţi numă-rabile de mulţimi numărabile.

Teorema 2. ***Mulţimea numerelor raţionale este numărabilă.***

1) Considerăm mai întîi mulţimea fracţiilor pozitive. Să reprezentăm numitorii succesivi pe axa *x,* iar numărătorii corespunzători deasupra, pe un rînd paralel cu axa *y,* aşa că fiecare fracţie este reprezentată de un nod al caroiajului. Le vom nume-



rota, de exemplu, urmărindu-Ie în succesiunea lor pe pătrate cu laturile în lungul lui *ox* şi *oy.*

2) CÎND NUMEROTĂM NUMERELE RAŢIONALE pozitive, punctele coliniare cu originea trebuie considerate echivalente. Vom conveni ca în operaţia de numerotare a fracţiilor să nu numerotăm decît punctul întîlnit primul pe fiecare rînd: acela va fi fracţia ireductibilă; care reprezintă numărul raţional. J

De remarcat că toate acestea sînt în deplină concordanţă cu cela enunţate mai înainte: există o infinitate numărabilă de fracţii care reprezintă un număr raţional, iar reuniunea tuturor acestoil mulţimi este şi ea numărabilă. 1

Printr-o operaţie de dedublare, deducem apoi rezultatul pentru mulţimea numerelor raţionale de semne oarecare (atribuind numere pare numerelor raţionale pozitive şi numere impare celor negative). La fel de bine am fi putut numerota mai întîi numai fracţiile mai mici sau egale cu 1, apoi, prin dedublare,

am fi asociat fiecăreia fracţia ei inversă.

Este esenţial de remarcat că numerotarea, fireşte, nu respectă relaţia de ordine naturală a numerelor raţionale.

O altă remarcă evidentă este aceea că o submulţime *B* a unei mulţimi numărabile *A sau* conţine un număr finit de elemente, *sau* este ea însăşi numărabilă (fiindcă este suficient, cînd numerotăm elementele lui *A,* să omitem elementele complementarei lui *B).*

II. Puterea continuului

1) Teoremă. ***Mulţimea numerelor reale cuprinse între* 0 *şi* 1 *nu este numărabilă.***

Ştim că toate aceste numere reale pot fi reprezentate printr-un număr zecimal nelimitat, a cărui parte întreagă este 0, şi invers (cu excepţia semnalată în cap. 2). Ne-am putea imagina, de aceea, că am putea numerota mai întîi numerele cu o cifră, apoi pe cele cu două cifre, cu trei... cifre zecimale. Dar, în realitate, în felul acesta n-am lua în considerare decît numerele cu un număr finit de cifre zecimale, adică mulţimea numerelor zecimale, care este o submulţime a numerelor raţionale şi, prin urmare, o submulţime numărabilă. Trebuie să luăm în considerare mulţimea numerelor cu o infinitate de cifre zecimale.

Pentru a simplifica expunerea, va fi comod să pornim de la reprezentarea numerelor în sistemul cu baza 2; ele vor fi deci scrise sub forma 0, X_x Xg ...X_n..., unde cifrele X_t sînt 0 sau 1.

Demonstrăm rezultatul enunţat sub forma următoare: ***orice* ŞIR *de numere reale am considera, putem construi un număr real care nu aparţine şirului.***

Fie aşadar un şir dat

$$^{M}i = Q,\ X_{1;1}\ Xi_{;2}\ Xi_{;}3\ \ldots\ X_{1;n}\ \ldots$$

$$u_2 = 0,\ X_{2;1}\ Xg.g\ Xg._3\ \ldots\ Xg._n\ \ldots$$

f $^{l(}$p — 0, Xp.i Xp.g Xp.3 ... Xp.$_n$ ...

în Xp.$_n$, primul indice indică termenul şirului, iar celălalt rangul cifrei. Convenim să reprezentăm prin X'

cifra pe care nu o reprezintă X (aceasta înseamnă că dacă X reprezintă 1, X' reprezintă 0, şi invers). Atunci numărul

$$^{v} \text{ — } 0, \text{ Xj}_{;1} \text{ Xg.g } X_{9;3} \text{ ... X),}_{.n}\text{...}$$

nu face parte din şir fiindcă, oricare ar fi *n, v* diferă de u_n prin cifra de rang *n-*

Am demonstrat astfel că nici un şir numărabil nu poate epuiza numerele reale cuprinse între 0 şi 1, adică mulţimea pe care am numit-o *intervalul* (0, 1), (interval deschis sau închis, aici nu are importanţă). Spunem că această mulţime *are puterea continuului.*

Relaţia „este în corespondenţă biunivocă" este o relaţie de echivalenţă definită între mulţimi, relaţie numită *echipotenţă*; despre mulţimile dintr-o aceeaşi clasă spunem că au *aceeaşi putere,* sau acelaşi *număr cardinal.*

Prin urmare, orice mulţime care poate fi pusă în relaţie biunivocă cu intervalul (0,1) are puterea continuului: aşa este de pildă mulţimea numerelor reale mai mari decît 1, după cum rezultă din corespondenţa prin inversiune:

$$y = \underset{X}{\text{-;}}\ [0 < X < 1] \text{ —•> } [y > 1],$$

şi mulţimea tuturor numerelor reale,după cum rezultă de exemplu din corespondenţa

$$w = \frac{^{2J;}\ \textbf{- 1}}{\textbf{®(1 — } x\textbf{)}}\ _{f}$$

aplicaţie a lui 0 < *x* < 1 pe —oo < *y* < -f-oo.

Un interval oarecare *(a, b)* se va deduce din (0, 1) printr-o omo- tetie de raport *b — a.* Orice reuniune a unui număr finit de inter, vale poate fi pusă şi ea în corespondenţă biunivocă cu (0, 1) considerat drept o reuniune de tot atîtea subintervale.

2) Nu trebuie însă să se creadă că, în mulţimea numerelor reale, „nenumărabil" se confundă cu „reuniunea de intervale"; că aceasta ar fi o greşeală, rezultă din exemplul celebru numit *mulţimea tria- dică a lui Cantor.* (CANTOR, unul din fondatorii teoriei

mulţimilor, şi-a publicat lucrările între 1872 şi 1897.)

I III w III $|_x$

0,1 0,2 |

Folosim de data aceasta numeraţia în baza trei, aşadar cifrelJ 0, 1, 2. Pornind de la intervalul 0 x 1, suprimăm intervalul! 0, 1 < x < 0, 2, aşa că nu rămîn decît următoarele două intervale!

$$0 < x < 0{,}1 \text{ şi } 0{,}2 < x < 1.$$

Apoi, în mod analog, suprimăm

$$0{,}01 < x < 0{,}02 \text{ şi } 0{,}21 < x < 0{,}22.$$

După aceea, suprimăm cele patru intervale mediane ale intervalelor care rămîn:

$$0{,}001 < x < 0{,}002\ ,\ 0{,}021 < x < 0{,}022,$$
$$0{,}201 < x < 0{,}202,\ 0{,}221 < x < 0{,}222$$

şi aşa mai departe.

Toate numerele eliminate au cel puţin o cifră 1 în sistemul de numeraţie ales de noi; prin urmare, mulţimea *A* rămasă conţine, chiar după un număr infinit (numărabil) de operaţii, toate numerele care se scriu exclusiv cu ajutorul cifrelor 0 şi 2.

Or, mulţimea acestor numere este în corespondenţă biunivocă cu mulţimea tuturor numerelor scrise în sistemul cu baza doi, fiindcă este suficient să înlocuim simbolul 2 cu simbolul 1, păstrînd simbolul 0. Prin urmare, *mulţimea A considerată conţine o submulţime care are puterea continuului.*

Şi totuşi, mulţimea A nu conţine nici un interval: într-adevăr, fiecare din intervalele păstrate în fiecare etapă are lungimea

$$\frac{1}{3},\ \left(\frac{1}{3}\right)^2,\ \ldots,\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

şir care tinde către 0; chiar şi suma lungimilor acestor intervale păstrate în fiecare etapă, sumă care este succesiv

$$\frac{2}{3},\ \left(\frac{2}{3}\right)^2,\ \ldots,\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

tinde de asemenea către zero.

Vedem deci cît de riscant este să ne bazăm pe intuiţie în aceste chestiuni extrem de delicate.

III. Supliment despre numerele cardinale

Pentru a caracteriza, printre mulţimile infinite, pe cele care sînt echipotente, se foloseşte metoda următoare:

Fie două mulţimi *A* şi *B* astfel încît există o bijecţie a lui *A* în \B, ceea ce înseamnă că fiecare element *a* ^A are asociat un element 16 = f(a) gB, corespondenţa între *A* şi *f(A) = B'* fiind biunivocă. Dacă o teorie permite să se ataşeze numere cardinale mulţimilor *A* şi *B,* vom avea prin definiţie

$$\text{Cârd. } A = \text{Cârd. } B'$$

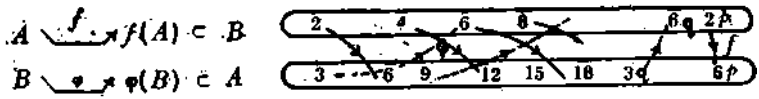
şi, deoarece *B'* c *B,* am vrea să putem scrie

$$\text{Cârd. } A \text{ Cârd. } B$$

dar, pentru a justifica aserţiunea, trebuie să ne asigurăm că s-a definit în felul acesta o relaţie de

ordine; prin urmare, trebuie să verificăm antisimetria:

Un exemplu în care Cârd. *A* Cârd. *B* şi Cârd. *A* = Cârd. *B* această situaţie este posibilă. Să luăm drept *A* mulţimea întregilor pari, iar drept *B* mulţimea multiplilor lui 3. Funcţia „dublare" este o injecţie <p a lui *B* în *A.* Funcţia „triplare"[1] este o injecţie *f* a lui *A* în *B.*



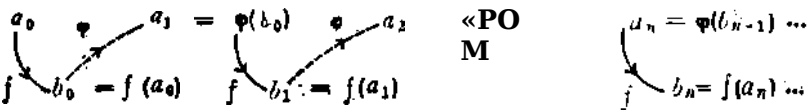
Or, *A* şi *B* sînt echipotente cu *N,* prin urinare sînt echipotente între ele, aşa cum rezultă din corespondenţa

2n 3n.

Teorema lui Bernstein. *Dacă există o injecţie f a lui A în B şi o injecţie* q> *a lui B în A, există o corespondenţă biunivocă între A şi B, ceea ce înseamnă că A şi B sînt echipotente.*

Prin ipoteză, *f* defineşte o corespondenţă biunivocă între *A* şi *f(A) = B'* c *B,* şi la fel <p, între *B* şi <p(B) = *A'* c *A.*

Fie *A"* complementara lui *A'* în A. Dacă *A"* este vidă, <p este tocmai corespondenţa biunivocă afirmată în enunţ. Vom presupune deci că *A ** nu este vidă. Să pornim atunci de la un element a_0 E *A"* şi să considerăm şirul:



Acest şir este infinit fiindcă *f* şi <p sînt injective şi de aceea nu putem regăsi un element deja găsit. Din aceleaşi considerente, şirurile care pleacă de la elemente distincte ale lui *A"* sînt disjuncte.

Să considerăm în felul acesta toate şirurile generate de elementele lui *A".* Funcţia *f* determină o Injecţie între mulţimea Aj a elementelor de sosire în A şi

mulţimea B_x a elementelor de sosire în B.

Nu ne rămîne decît să asociem complementarele

şi B_2 =

Or:

4_{1D} A'' D A'

prin urmare A_2 este imaginea prin <p a unei submulţimi a lui B care nu are nici un element în B_1; această submulţime este însă B_2, fiindcă orice element Ş al lui B_2 are o imagine a = <p({3) care este în A' fără să fie în A_r. Prin urmare A_2 = 9(B_2).

Am definit aşadar corespondenţa biunivocă căutată prin

■^1 \ *f S* şi -^8 _2_/ -®2-

în consecinţă, relaţia Cârd. A Cârd. B este o relaţie de ordine largă. Dar nimic nu ne permite să credem că ordinea este totală.

în afară de aceasta, noi n-am definit operaţii în mulţimea cardinalelor. De aceea, este mai bine să evităm cuvîntul „număr" în legătură cu cardinalele. Cele de mai sus nu ne permit să considerăm că prin introducerea cardinalelor am realizat o extensie a mulţimii întregilor.

§ 2. LOGARITMI. EXPONENŢI GENERALIZAŢI

[în mulţimea numerelor reale, cele două operaţii: adunarea şi 'înmulţirea au structuri analoage pe care le-am caracterizat în Cartea I. Totuşi, operaţia inversă adunării, scăderea a — a', este definită pentru toate perechile de numere reale, în timp ce împărţirea — nu este definită decît dacă b' nu este nul. Mulţimea numerelor reale înzestrată cu operaţia adunare (grup aditiv) şi mulţimea numerelor reale (cu zero exclus) înzestrată cu operaţia înmulţire (grup multiplicativ) sînt izomorfe pentru aceste operaţii. Elementele neutre, respectiv 0 şi 1, se corespund, în mod evident.

a) **Să ne concentrăm atenţia asupra anumitor subgrupuri ale grupurilor de mai sus, şi anume asupra acelor subgrupuri care nu au decît un singur generator:**

Grup aditiv *., — • ţ 3^1 y 2d) O» , d j 3a, . na, .. 0 } ^ic/j . na*

1 t 1 1 t ! I I

Grup multiplicativ 1 111 • 5 - - > - - 9 - - 9 1 *b, b*², |» , .,*b*ⁿ

în primul subgrup, ordinea naturală se păstrează dacă *a* este pozitiv, şi se inversează dacă *a* este negativ; în al doilea, ordinea naturală se păstrează dacă *b* este mai mare decît 1, şi se inversează dacă O < *b* < 1. Ne limităm la cazul uzual *a* > O, *b* > 1; din el putem deduce fără dificultate cazul cu *a* negativ, sau cel cu *b* mai mic decît 1, inversînd, pur şi simplu, relaţia de ordine, dar *este esenţial ca b să fie pozitiv.*

Pentru *n* întreg pozitiv, *a* > 0 şi *b* > 1 fiind daţi, asociem aşadar elementele *na* şi *bⁿ.* Pe baza izomorfismului celor două grupuri din punctul de vedere al operaţiilor şi a relaţiei de ordine totală, asociem de asemenea

—*na* şi l/6ⁿ.

Apoi, dacă *p* şi *q* sînt întregi pozitivi, asociem

şi ţ/P=O/6)ᴾ>

şi, de asemenea, ***1*** 1 “7° ?1

Fie *SL* mulţimea numerelor — *a* cu *p* întreg de semn oarecare şi ... 9 i • ■ *q* întreg pozitiv, şi *St* mulţimea numerelor reale asociate; izomorJ fismul arată că sumei a două elemente din *<3.* îi corespunde produsul elementelor asociate din *St.*

Rămîne să extindem corespondenţa în aşa fel îneît *£L* să devină mulţimea *Si* a tuturor numerelor reale, iar *St* mulţimea &⁺ a tuturor numerelor reale pozitive.

Dificultatea este următoarea: vecinătăţile-capcane care permit să se definească un element *r* al lui *Si* plecînd de la elementele lui *Q* sînt definite folosind structura aditivă. Şi atunci se pune întrebarea: dacă un şir de intervale cuprinse unul înaltul (a_n,$a_„$) este astfel îneît $a_„ — a_n$ tinde către zero, oare la fel se întîmplă şi cu diferenţa a imaginilor lor în *Si⁺,* unde

structura
considerată este structura multiplicativă?

în Cartea III (cap. 5, § III), problema aceasta va fi abordată şi rezolvată altfel, aşa că cititorul poate omite demonstraţia care urmează: ea reuşeşte graţie unei alegeri judicioase a valorilor a_n,

fc) Demonstraţie. **Să plasăm numărul real r, presupus pozitiv, printre multiplii unui număr *a* > 0 care aparţine lui d- Deoarece acest şir al multiplilor este arhimedean, a şi a' sîntdeterminaţi de a = Zca, a' = (Zt + l)a.**

Ideea constă în a alege valori succesive ale lui *a* definite prin $a_n = -$, unde a_0 este un număr ales.

2«

Astfel,

$$\alpha_n = k_n \frac{a_0}{2^n}, \quad \alpha_n' = (k_n + 1)\frac{a_0}{2^n}; \quad \alpha_n' - \alpha_n \quad \frac{a_0}{2^n},$$

Să traducem totul în presupunînd că $b_0 > 1$ este numărul care corespunde lui a_0:

$$p;=^{2\wedge} \qquad + \qquad f=^{2n}/T_0>i$$
$$P_n$$

Să notăm atunci = 1 + u_n, unde $u_n > 0$.

Scriind numai primii doi termeni ai dezvoltării, obţinem $b_0 = (1 + u_n)^{2^{n}1} > 1 + 2^n u_n$, adică $u_n < -$ -.

Atunci:

J» — 1 < $\frac{\sim\sim^{1}}{2n}$. prin urmare P„ — Pn < $\frac{P_n}{r\ 2^n}$ •

Să dăm acum lui *n* două valori: de unde

$$^{n}I < {}^{n}2 \qquad < {}^{a}n2\ {}^{a}n2\ {}^{a}ni \qquad Pn_a\ Pni$$

$$P"2\ Pn_a < Pni\ {}^{\circ}{}_2n_2$$

Este suficient acum să menţinem n_1 constant şi să-1 facem pe n_2 să tindă către infinit: deoarece $2^n 2$ tinde către infinit, inversul lui tinde către zero; prin urmare, şi $P_{„2} — Ş_{na}$ tinde către zero.

c) Şirul valorilor P_n şi formează prin urmare intervale cuprinse unele în altele, a căror lungime tinde către 0; ele sînt „capcane“ care determină un număr real p pe care trebuie să-l asociem lui r, pentru a păstra izomorfismul după extensie.

Invers, orice număr real pozitiv p poate fi definit prin intervale cuprinse unele în altele ($Ş_n$, folosind numere luate din *S>*, fiindcă este total ordonată, de unde rezultă r, imaginea lui p în *31.*

în final, am definit o corespondenţă biunivocă între *SI* şi oV care este un izomorfism între mulţimea *SI* înzestrată cu o structură de grup aditiv ordonat şi mulţimea <&⁺ înzestrată cu o structură de grup multiplicativ ordonat.

în particular, numărului 1 E d îi corespunde un număr Corespondenţa este definită prin perechea de elemente neutre (0 ; 1) şi perechea (1; Ş). Spunem că p este *baza logaritmilor* şi scriem *a* = logpfc.

Pe de altă parte, dacă *n* este un întreg pozitiv, numărul *a = n* are asociat numărul *b* = p^n. Convenim să extindem această notaţie: dacă *a = — n (n* întreg pozitiv), *b* = l/p^n se scrie *b* = p^{-n} dacă *a = —* (p şi *q* întregi pozitivi), *b* = P^p se scrie *b* = $P^{p''}$« 7

dacă *a - — —» b = —*î— se scrie *b* = ^{q}

în fine, dacă *r* este un număr real oarecare, convenim să-i scriem asociatul sub forma

$$P = P^r$$

(care se citeşte ,,P la puterea r“ sau „p la exponentul r“).

în felul acesta, oricare ar fi numărul real *x* şi asociatul acestuia *y* din <&⁺, am introdus două notaţii echivalente:

$$® = \log_p y,\ y = P^1$$

şi izomorfismul se exprimă prin

$$\text{iog}_e(yi \bullet 2/2) = {}^{lo}gpî/i + \quad ?' P^{Tl+'2} = P^{11} \bullet P^{T'} \bullet$$

Am introdus deci două funcţii inverse una alteia ; prima se numeşte *funcţia logaritm de baza* Ş; a doua se numeşte *[funcţia exponenţială de bază* p.

Alegerea bazei. Baza p poate fi aleasă arbitrar, pozitivă, diferită de 1; în general, ea este luată mai mare ca 1 pentru ca funcţiile logaritm şi exponenţială care se deduc să fie crescătoare.

a) Din punctul de vedere al calculului, dat fiind

sistemul de numeraţie pe care-1 folosim, singura bază practică este 10. în acest caz, a aduna un întreg lui *x* corespunde, în *y,* la o simplă deplasare a virgulei; de aceea, în tabele nu figurează decît partea zecimală a lui *x.* Astfel, deoarece în tabel găsim, ca valoare aproximativă corespunzătoare lui 34, şirul de cifre 53 148, şi deoarece

log 1 = 0, log 10 = 1, trebuie să luăm

log 3,4 = 0,53 148, log 34 = 1,53 148, log 340 = 2,53 148 etc., şi

log 0,34 = - 1 + 0,53 148,

log 0,034 = — 2 + 0,53 148 etc.

Este evident comod să lăsăm aceşti logaritmi negativi sub forma în care i-am obţinut, fără a face scăderea care ne-ar face să pierdem avantajul numeraţiei zecimale. Se face doar convenţia de a condensa scrierea: ultimii doi logaritmi de mai sus se scriu respectiv 1,53 148 şi 2,53 148. Se subînţelege că partea zecimală este totdeauna pozitivă.

Efectuarea calculelor în *£L* şi *nu* în $ constituie o simplificare importantă mai ales atunci cînd trebuie extrase rădăcini de ordinul *n* în &>, dar trebuie început totdeauna prin a face în aşa fel încît în să nu rămînă de efectuat decît operaţii notate cu semnul înmulţirii; spunem atunci că expresiile au devenit „calculabile prin logaritmi". Deseori reuşim să ne atingem acest scop introducînd unghiuri auxiliare prin funcţii trigonometrice şi folosind supleţea formulelor trigonometrice care permit înlocuirea sumelor cu produse.

Din punct de vedere istoric, introducerea logaritmilor de către Neper (1550—1618) şi introducerea de către Briggs, prietenul lui Neper, a tabelelor de logaritmi în baza 10 (numerele de la 1 pînă la 100000 cu 11 zecimale), curînd după extinderea, de către Stevin, a notaţiei zecimale la fracţiile zecimale (1585), au permis

astronomilor să ducă la bun sfîrşit calculele cerute de aplicarea legii lui NEWTON (1642— 1727). în zilele noastre, calculele acestea se fac cu ajutorul calculatoarelor. Rigla de calcul şi discurile de calcul sînt construite, şi ele, folosind corespondenţa prin logaritmi.

b) **Din punct de vedere teoretic, dacă se studiază *funcţia logaritm ţi funcţia exponenţială,* se constată că există un număr care se bucură de o situaţie privilegiată. Din însăşi analiza care ne-a permis să definim *y* = p^x pentru orice valoare a lui *x,* ştim că *y* tinde către $P^{T°}$ cînd *x* tinde către x_0; prin urmare**

$$P^{1}—^{T}o \text{ -> } 1 \text{ cînd } x — x_0 —> 0.$$

Dar raportul

$x \sim x_n$

admite, în aceste condiţii, o limită care depinde de (3- Vom vedea că există o valoare a lui [3, pe care o notăm e, astfel încît acest raport tinde către 1. Atunci, derivata pentru $x = x_0$ a funcţiei exponenţiale de bază e,

adică limita raportului

Aceste formule care dau, respectiv, o soluţie a „ecuaţiilor diferenţiale" cînd $x \to x_0$ este tocmai $y_0 = e^{x_0}$.

Tot astfel, derivata şi $g'(x) = \frac{1}{x}$ logaritm în baza e, $x =$ funcţiei adică limita raportului $\to y_0$ justifică introducerea numărului e în analiză. Adăugăm

Aşadar $\log y$ este $1/y_0$

că e, ca

şi 7r, este un număr transcendent. Valoarea lui

aproximativă este

e ~ 2,71 828.

Vom regăsi toate acestea pe o cale diferită în Cartea a III-a, cap. 5, III.

PARTEA A DOUA

EXPRESII ALGEBRICE REZOLVAREA ECUAŢIILOR

CAPITOLUL 1

POLINOAME. FRACŢII RAŢIONALE

» »

. Dacă *x* reprezintă un număr real, regulile de calcul ne permit — jăcind dezvoltările — să punem orice *expresie întreagă,* adică price expresie care nu conţine decît specificări de sumă, diferenţă, produs, sub *forma ei dezvoltată,* care este o sumă de produse. Exemplu:

$$(x + l)^2 + 2x - 3(a: - 2)^2 - (5x + 1) = T?^2 - 13x + 12.$$

Ne vom ocupa acum de expresii de tipul acesta fără însă a presupune că *x* reprezintă un număr şi introducînd axiomatic definiţii de operaţii care sînt valabile cînd *x* reprezintă un număr. In felul acesta, vom introduce, într-o formă abstractă, aşa-numita *structură de polinom cu o nedeterminată.*

Adăugăm un element neutru notat *x°* şi numim 5C mulţimea astfel constituită.

Cealaltă mulţime este o mulţime de numere. Anumite părţi ale teoriei impun ca această submulţime a mulţimii numerelor să fie un corp (aşadar, ca în ea să fie posibilă împărţirea, dacă se exclude zero), dar foarte adesea este suficient ca ea să fie un inel, de exemplu inelul *Z* al întregilor relativi. în această mulţime vom lua *coeficienţii.* Afară de cazul în care vom specifica altfel, vom lua mulţimea 51 a tuturor numerelor reale şi vom defini *polinoamele cu o nedeterminată pe corpul numerelor reale.*

1) Introducem O OPERAŢIE NOTATĂ CU SEMNUL ÎNMULŢIRII

$$ax^p, \text{ a £ S,, i}^p \text{ £ SC}$$

cu asociativităţii

a(bx^p)* dă *(ab)x^p **care se notează *abx^p*** **şi (ao;^p) *{bxfl)*** **dă (afc)(a:^px«), deci *abx^p+q.***

Elementul neutru este la;^0. Vom vedea că (printr-un abuz de notaţie) acest element se notează 1, şi că *lx^m* se notează *x^m,* iari ar^0 se notează *a.* Noi însă nu folosim aceste abrevieri, la începutu^ studiului.

Expresiile introduse se numesc *monoame',* în monomul *ax^m, a* este coeficientul iar *m,* exponentul puterii lui *x,* este *gradul monomului.* Monoamele cu aceiaşi exponenţi se numesc monoame *asemenea.*

2) Introducem între monoame O OPERAŢIE NOTATĂ CU SEMNUL ADUNĂRII

$$ax^p \text{ 4- } bxi$$

cu o condiţie de distributivitate în cazul *p = q*

$$ax^p + bx^p \text{ dă monomul (a + } b)x^p.$$

Aceasta ne determină să acceptăm ca element neutru monomul 0x^p, oricare ar fi *p.* îl vom nota £2 (mai tîrziu, vom scrie pur şi simplu, 0, zero).

Dacă monoamele nu sînt asemenea *p q,* adunarea introduce elemente noi care nu mai sînt monoame şi care se numesc *polinoame:* ele sînt sume de un număr oarecare, finit, de monoame neasemenea (vom presupune totdeauna că s-a făcut *reducerea termenilor asemenea),* iar monomul

apare ca fiind un polinom cu un singur termen.

Adunarea este presupusă asociativă şi comutativă, ceea ce permite reducerea termenilor asemenea, precum şi adunarea polinoa- melor. Se poate însă întîmpla ca toţi coeficienţii să devină nuli; polinomul este atunci elementul neutru al adunării; spunem că el este *polinomul nul,* pe care îl vom nota Q. (Mai tîrziu, vom scrie pur şi simplu 0, printr-un abuz de notaţie.)

3) Introducem, în fine, ÎNMULŢIREA UNUI POLINOM CU UN NUMĂR, definită prin distributivitate în raport cu adunarea monoamelor.

k{ax^{p} + tx^{Q}) dă kax^{p} + kbx^.

Mulţimea â a polinoamelor apare acum ca fiind un spaţiu vectorial care are ca bază mulţimea *x°, x^{1}, x^{2}, ... , x^{h}, ...* , şi pe 51 ca mulţime a operatorilor (sau ca fiind un *modul,* dacă mulţimea coeficienţilor este doar un inel). Acest spaţiu vectorial are deci o infinitate de dimensiuni. Dacă ne limităm însă la exponenţi mai mici sau cel mult egali cu un *p* dat, este vorba de un spaţiu cu *p* + 1 dimensiuni (Cartea I, cap.3).

Prin convenţie, se presupune că termenul cu exponentul cel mai mare, care este scris efectiv, are coeficientul nenul (aşa cum, la un număr scris în numeraţia cu baza zece şi despre care se spune că are trei cifre, se presupune că cifra sutelor este nenulă). Exponentul cel mai mare se numeşte *gradul polinomului.* Dacă numim *P* polinomul, gradul lui se scrie d(P). Uneori este important să considerăm termenul cu exponentul cel mai mic şi cu coeficient nenul; acel exponent va fi notat 8(P).

Din însăşi definiţie rezultă că d(P)^-8(P), egalitatea reali- zîndu-se numai în cazul unui monom.

Cazul d(P) = 3(P) = 0 corespunde monomului *ax°.*

Polinomul nul* £2 *nu are grad.

înmulţirea cu un număr nenul conservă *d(P)* şi 8(P). în cazul adunării, din regula de reducere a termenilor asemenea rezultă că d(P_x P_2) este cel mult egal cu cel mai mare dintre gradele d(P_x) şi d(P_2), iar *8(P_1 + P_2)* este cel puţin egal cu cel mai mic dintre numeiele 8(P_2) şi S(P_2), ceea ce se scrie

$$+ P_2) < \sup [d(P_x), d(P_2)]$$

$$8(Pi + P_2) > \inf (8\hat{}), S(P_2)j.$$

Mulţimea monoamelor *ax°* constituie un spaţiu vectorial cu o dimensiune izomorf cu mulţimea numerelor reale ; tocmai de aceea scriem, în general, elementul *ax°* sub forma *a.*

Cu baza formată din *x°* şi *x¹* generăm un spaţiu cu două dimensiuni, cel al binoamelor de gradul întîi

ax¹ + bx°,* care se scrie, în general, *ax + b.

Cu x°, *x¹, x²* generăm mulţimea trinoamelor de gradul doi *ax² + bx¹ + cx°,* care se scrie, în general, *ax²* -/- *bx c* etc.

***Schimbarea bazei.* Din punctul de vedere al spaţiilor vectoriale, două polinoame sînt independente dacă nu există perechi de numere reale nenule r_x, r_2 astfel încît r_lP_1 + r_2P_2 să fie polinomul nul Q, adică dacă coeficienţii lui *P±* şi *P₂ nu* sînt proporţionali. în particular, dacă gradele nu sînt egale, polinoamele sînt totdeauna independente. Dar singura bază cu adevărat simplă este cea formată din monoame cu coeficienţii egali cu unitatea; o vom numi *bază fundamentală* şi vom reveni ceva mai departe supra acestei noţiuni.**

4) INELUL POLINOAMELOR. Mai introducem în mulţimea poli- noamelor o operaţie notată cu semnul înmulţirii şi definită plecînd de la înmulţirea monoamelor şi de la distributivitatea acestei operaţii în raport cu adunarea monoamelor: este operaţia exprimată prin formula concisă (în care semnul £ indică suma):

$$^{dă}\ £\ ^{a}j^{b}i^{xi+i} > i=P\ J|>=P'\ J$$

unde se subînţelege că în membrul al doilea trebuie făcută reducerea termenilor asemenea, adică a termenilor care dau aceeaşi valoare *i + j.* Această reducere a termenilor asemenea se efectuează numai asupra termenilor de grade intermediare, fiindcă termenul de grad cel mai mare este exact

$$a_n b_n, x^{n+n'},$$

iar termenul de grad cel mai mic este $a_p b_{p'} x^{p+p'}$. De unde, formulele importante:

$$W = d(PJ + d(P_2)$$

$$8(P_x P_2) = 3(P_X) + 8(P_2)$$

care sînt mai simple decît cele referitoare la suma polinoamelor.

Consecinţă. ***Un produs de două polinoame este polinomul nul dacă şi numai dacă unul din factori este polinomul nul.*** **într-adevăr, acesta este singurul caz în care produsul nu are grad.**

Un produs de mai multe polinoame se defineşte în modul obişnuit, şi se verifică (de pildă, printr-un raţionament prin recurenţă) că este asociativ, comutativ şi distributiv în raport cu adunarea polinoame lor. Mulţimea polinoamelor formează prin urmare un inel comutativ.

Pe baza asociativităţii, se demonstrează — ca la numere — că *un produs de polinoame este polinomul nul* Q, *dacă ţi numai dacă {cel puţin) unul din factori este el însuţi polinomul nul.*

Calculul practic al produsului. Se caută toate monoamele de un acelaşi grad — acest grad putînd lua toate valorile de la *d{P₁) + d{P₂)* pînă la 3(P₁) + 3(P₂) — Ş> se fac, rînd P^e rînd, toate reducerile.

Caz particular important. PUTERILE UNUI BINOM *ax + b.*

Aşa cum se poate demonstra prin recurenţă, termenii polinomului obţinut dezvoltînd *{ax + b)^n* sînt toţi monoame de forma

$$c_{n,p} a^p b^n \sim^p x^p, \quad 0 < p < n,$$

unde numerele c_{np} se obţin din tabelul numit *triunghiul lui Pascal'.* după formula

n = 1	.....	1		1			
n = 2	.....	1		2	1		
n = 3	.....	1		3	3	1	
***n* = 4**	.....	1	4	6	4	1	
***n* = 5**	.....	1	5	10	10	5	1
***n* = 6**	.....	1	6	15	20	15	6	1

$$^{c}n+i,\ P+l = {}^{c}n,p\ H\text{-}\ {}^{c}n,\ p+j\text{-}$$

Considerînd atunci termenii de grad *p* în *{ax + b)^k* şi *{ax + b)^{k+1} {k > p),* se verifică prin recurenţă după *n* formula

$$\underline{n|n-1)\ (n-2)\ \ldots\ (n-p+l)}$$

Aceste numere, numite „coeficienţii binomiali“, se notează *C^p* sau *{p).*

Formula astfel *verificată* a fost *descoperită* cînd ne-am ocupat de numărări (Cartea a Il-a, Partea I, cap. 1, § 1).

5) SCHIMBAREA BAZEI FUNDAMENTALE. Convenim să

numim bază fundamentală a spaţiului vectorial al polinoamelor nu numai baza $x^0, x^1, x^2, x^n,$ ci şi baza

$(la:^1 - aa:^0)^0$, $(la:^1 - aa:^0)^1$, $(la:^1 - aa:^0)^2$, ... , $(la:^1 - aa;^0)"$, ...

scrisă prescurtat

$$(a: — a)°, \ (x — a)^1, \ (x — a)^2, \ ..., \ (a: — a)", \ ...$$

unde a este un număr oarecare ales în corpul coeficienţilor. După ce se fac dezvoltările, expresiile acestea sînt polinoame de grade diferite, deci — polinoame independente. Să numim *X* binomul *x* — a; celela'te polinoame ale bazei sînt puterile lui *X.* Noua expresie a unui polinom *P* se va obţine *înlocuind în P puterile lui x prin puterile lui X* + a, *dezvoltînd aceste puteri şi reducînd termenii asemenea ai expresiei considerate drept un polinom în X.*

EXEMPLU. *P* este polinomul $2a:^2 — 3x$ 1.

Obţinem

$$2(X -|- a)^2 — 3(X —|— oc) —1,$$

de unde, polinomul în *X:*

$$2X^2 + (4a - 3)X + (2a^2 - 3a + 1).$$

în final, forma căutată este

$$2(a: — a)^2 + (4a — 3)(x — a) + (2a^2 — 3a + 1).$$

Trebuie însă să spunem că, în general, răspunsul se dă păstrînd polinomul în *X.* Unicitatea rezultatului este asigurată de proprietăţile spaţiului vectorial; de altfel, ceva mai departe, o vom putea demonstra şi direct. Ceea ce ne interesează acum este mai ales posibilitatea efectuării acestui calcul, care este fără excepţie.

Două remarci importante sînt imediate. 1) Polinoamele în *x* şi în *X* sînt de acelaşi grad, termenii de gradul cel mai mare avînd chiar şi coeficienţii egali. 2) Termenul de grad 0 este totdeauna numărul care s-ar obţine dacă am înlocui, în polinomul *P,* nedeterminata *x* cu numărul a şi am face cu numerele operaţiile care erau indicate ca trebuind să fie făcute cu monoamele. Numărul astfel calculat se numeşte *valoarea numerică a polinomului* cînd se înlocuieşte *x* cu a.

Acest număr se scrie simbolic P(a). Asemenea valori numerice ataşate polinoamelor sînt atîtde importante pentru cunoaşterea polinomului, încît trebuie să le studiem încă înainte de a continua studiul inelului polinoamelor şi de a defini în el împărţiri.

II. Valori numerice ale unui polinom. Divizibilitatea cu *(x— a)*

Am definit mai sus valoarea numerică P(a) a unui polinom *P* cînd înlocuim în el nedeterminata cu a G *SL,* sau, cum se spune mai pe scurt, „valoarea pentru *x* = a". Conform axiomelor alese, dacă 5 şi II sînt respectiv suma şi produsul a două polinoame Px şi P_2, avem, oricare ar fi numărul a,

$$S(a) = P_x(a) + P_2(a)$$

Şi

$$n(a) = P\hat{}a) \ ,P_2(«)i$$

(egalităţi numerice).

Dacă facem o schimbare de bază notînd cu *X* binomul *x — a* şi dacă numim *T(X)* polinomul format după regula indicată mai sus, rezultă — din paralelismul între calculul cu polinoame şi calcul cu numere — că

$$|Vp \ e \ a : P(P) = T(P - a).$$

în particular, luînd

$$P = a, \ P(a) = T(0),$$

care este tocmai rezultatul pe care îl sesizasem deja prin calcul, fiindcă T(0) este coeficientul termenului de grad 0 al polinomului *T.* Dar a spune că acest coeficient este nul este echivalent cu a spune că, după schimbarea bazei, *x — a.* poate fi scos în factor:

***Condiţia P(a.) = 0 este echivalentă cu condiţia de existenţă a unui polinom Q astfel încît P să fie dezvoltarea lui (x — a^Q.* Convenim să folosim semnul =, pe care îl citim *„echivalent cu"*, pentru a exprima că nişte expresii care conţin nedeterminata *x* formează, după dezvoltare şi reducerea termenilor asemenea, un acelaşi polinom.**

Aşadar, acest semn se deosebeşte net de semnul = scris între două numere. Pe de altă parte, convenim să indicăm numele ales pentru nedeterminată plasîndu-1 între paranteze: P(a:) este un polinom, dacă *x* este nedeterminata ; acelaşi simbol reprezintă un număr dacă *x* este un număr. Enunţul nostru se scrie:

Teorema I:

$$[P_{(a)} = 0] \qquad [30(3) : P(x) \ (x - *)Q(x)] \qquad (1)$$

Vom spune că P(a) = 0 este condiţia necesară şi suficientă ca pelinomuî *P(x)* să fie *factorizabil (decompozabil)* intr-un produs în care unul din factori este *x* — a. Exprimăm de asemenea acest fapt spunînd că polinomul *P(x)* este *divizibil cu binomul (x* — a).

Un număr *r* astfel încît P(r) = 0 se numeşte *un zero al polino- mului*; spunem, de asemenea, că r este *o rădăcină a ecuaţiei P(x)* =0, iar nedeterminata *x* apare de data aceasta ca fiind *necunoscuta ecuaţiei.*

A căuta rădăcinile unei ecuaţii înseamnă *a o rezolva.* în fine, o ecuaţie în care unul din membri este 0 iar celălalt este un polinom se numeşte o *ecuaţie întreagă.*

în final, vedem că există o legătură strînsă între cele trei puncte de vedere: rezolvarea ecuaţiilor întregi, căutarea zerourilor unui polinom şi descompunerea într-un produs (factorizarea) a unui polinom.

Trebuie să mai notăm că dacă polinomul *Q* introdus mai sus este el însuşi astfel încît

$$<?(«) = 0,$$

există un polinom astfel încît

$$Q(x) = (x — a)Qi(x),$$

de unde rezultă

$$P(x) = (x — oc)^{2}{}^{\wedge}*)$$

şi aşa mai departe. Dacă obţinem, în cele din urmă,

$$P(x) = (x - oc)^{m}n(a:) \qquad (2)$$

cu

$$n(a) =/= 0,$$

spunem că a este un *zero de ordinul m* al lui *P* şi o *rădăcină de ordinul m* a ecuaţiei *P(x)* = 0; zerourile şi rădăcinile se numesc „simple“ dacă *m*= 1, şi „multiple" dacă *m* este mai mare decît 1.

De remarcat că procedeul care foloseşte schimbarea de bază ne dă direct pe (2), fără a mai trece prin (1), prin intermediul poli- nomului *T(X).*

Exemple de calcul:

Fie P(a:) = a^ — 3a^ — 7a:^{3} 34a:^{2} — 36a: + 8. El este astfel
încît P(2) = 0.

Să înlocuim pe *x* cu binomul *X* + 2. Coeficienţii lui *P(x)* sînt scrişi în ultima coloană a tabelului:

(X + 2)5 =	X^5 +10	X^1 +40	X^3 +80	X^2 +80	X +32	+ 1
IX + =	+1	+ 8	+ 24	-.32	+ 16	-3
(X + 2)^3 =		+r	+ 0	+ 12	+ 8	— 7
(X + 2)^3 =			+ 1	+ 4	+ 4	+34
-^{Y} + - =				+ 1	+ 2	-36
^{1} -					+ 1	+ 8
T(X) =	X^5 +7	*X** +9	X^3 +o	X^3 +0	X +0	

de unde

$$P(x) == \{x — 2)^3 [(a; - 2)^2 + 7(a: - 2) + 9]$$

$$= (a: - 2)^3 [a;^2 + 3a; - 1].$$

Să reţinem că polinomul *Q(x)* din formula (1) va apărea, cînd vom studia diviziunea polinoamelor, ca fiind cîtul

împărţirii lui *P(x)* la a: — a. Vom vedea acolo şi procedeul de calcul direct.

Teorema II. *Dacă un polinom P se anulează pentru valori* ^{a}i, a_2, ... , a_A *diferite două cîte două, el este divizibil cu produsul*

$$(x - a_x)\ (x - a_2) \dots (x - a_{ft}).$$

într-adevâr,

[P(«1) = 0] [3(2! : *p(x) = (x* - aj^a;)].

De aici deducem

$$P(a_2) = (otg - a_x)\ \&(a_2)$$

Or,

$$«2 - {}^{a}l = h\ °>$$

prin urmare

[P(a_2) = 0] = 0] [3& : $Q_t(x) =$ (x - a_2)^$_2$(x)]

de unde, pe baza asociativităţii produsului de polinoame:

$$P(x) = (x - oc_x)\ (x - uJQJx).$$

De aici deducem

$$P(a_3) = (oc_3 - a_x)\ (a_3 - a_2)\ \&(a_3).$$

Or,

$$^{a}3 - = f = 0\ Ş^{*}\ “3 - «2 =/= 0>$$

prin urmare

[P(a_3) = 0] <=> [<?$_2$(«$_3$) = 0] <=> [3<?$_3$: Q_t& = (* - «,) &(*)], de unde

$$P(x) = (x - <x_x)\ (x - oc_2)(x - a_3)\ Q_a(x)$$

şi aşa mai departe, pînă la

$$P(x) == (x - oc_x)\ (x - ot_2) \dots (x - oc_M)\ Q_k(x).$$

Consecinţe fundamentale. 1) ***Un polinom de grad n nu poate lua valoarea numerică*** **0** ***pentru mai mult de n valori atribuite lui x.***

Un polinom care ia valoarea **0** ***pentru o infinitate de valori atribuite lui x nu poate fi decît polinomul £1, care nu are grad.***

2) ***Un polinom de grad n care admite n zeroruri*** a_x, a_2, ..., $<x_n$ ***este polinomul care se obţine dezvoltând***

$$a(x - a_x)(x - ota) \dots (x - a_{\prime\prime}) \; a\, ax^n - a(a_x + \; +$$

$$+ \bullet\bullet\bullet + an)^{*\prime\prime"1} + \quad + (- l)^n a a_x a_2 \dots a_n.$$

Dacă polinomul ordonat este

$$P(x) = ax^n + \quad + \ldots + a_p x^{n\sim p} + \ldots + a_n x^{\circ}$$

şi notăm cu s_p suma produselor rădăcinilor luate cîte p, avem

$$\text{ai} = — \qquad \ldots,\ a_p = (—l)^p \text{as}_p,\ \ldots,\ a_n = (— \text{l})” \text{os}_n.$$

Aşadar, coeficienţii sînt expresii simetrice de rădăcini.

Corolar. *Dacă două polinoame P± de grad n_1 şi P_2 de grad n_2 iau aceleaşi valori numerice pentru un număr k de valori ale lui x, şi k este mai mare decît n^ şi n_2, polinoamele sînt formate din aceleaşi monoame* **(şi, în particular, = n_2).**

într-adevăr, $P_± — P_2$ este un polinom de grad cel mult egal cu cel mai mare dintre gradele n_r şi n_2, şi el ia valoarea 0 pentru cele k valori atribuite lui x.

APLICAŢII. Nu există decît un singur polinom de grad (n — 1) care ia n valori numerice date pentru n valori date ale lui x.

Este uşor de construit un asemenea polinom ; de exemplu, pentru n ' = 2, formăm expresia

$$Pi\text{--------}^{\text{L}} + \text{P}_2\text{------}^{\text{L}}$$

şi obţinem, într-adevăr, pentru $x = a_x$ şi p_2 pentru $x = oc_2$.

Pentru *$n = 3$,* extindem expresia şi scriem

$$Pi \quad \frac{(X - \text{gjti} - a_3)}{(«1 — “2)\ (a_x - <X_a)} \qquad + p_3 \ \frac{(\text{l} \sim «1) \qquad\qquad — <\text{Xj})}{(“3 — “1)\ (“3 — “\text{î})}$$

şi aşa mai departe. Teorema demonstrată ne arată că soluţiile scrise sînt singurele posibile. Ele există dacă inelul coeficienţilor este un corp.

CONCLUZIE. Două polinoame care pentru măcar o valoare atribuită nedeterminatei iau valori diferite, nu sînt constituite din aceleaşi monoame, şi invers. Or, numim în general *identitate* o egalitate literală ai cărei doi membri iau aceeaşi valoare numerică pentru *orice* valori numerice atribuite literelor; spunem că cei doi membri sînt *identici.* Am arătat deci că *două polinoame identice sînt formate din aceleaşi monoame,* fapt pe care îl exprimăm prin simbolul = . Rezultă de aici că pentru a verifica că o egalitate este o identitate în raport cu o literă care intervine sub formă întreagă, este suficient să dezvoltăm cei doi membri şi să constatăm egalitatea coeficienţilor polinoamelor în care litera este considerată drept o nedeterminată.

REMARCĂ. Studiul de mai sus presupune inelul coeficienţilor destul de cuprinzător. Dacă, de exemplu, acesta este inelul claselor de resturi de întregi, modulo 2 (în care singurele numere distincte sînt 0 şi 1), polinomul $x^2 - x$ este nul oricare ar fi *x!* De remarcat că gradul 2 nu face parte din mulţimea în care sînt luaţi coeficienţii.

III. împărţirea în inelul polinoamelor

1. Cit exact. Fie date două polinoame 4(z) şi B(x); există oare un polinom-cît *Q(x)* astfel încît *A = BQ?* Be la început, studiul acesta diferă profund de problema tratată pentru inelul întregilor, fiindcă nu dispunem de o relaţie de ordine totală. Este adevărat că putem clasifica polinoamele după ordinea crescătoare a gradelor, dar există o infinitate nenumărabilă de polinoame de un grad dat — dacă coeficienţii sînt luaţi în corpul numerelor reale, aşa cum presupunem noi.

Fără a demonstra *a priori* existenţa sau neexistenţa polinomului *Q,* vom căuta mai întîi monoamele succesive folosind condiţii necesare.

în primul rînd, *dacă Q există,* avem

d(Q) = d(A) — d(B), fie el = n

8((?) = 3(4) - 3(B), fie el = *p,*

aşa că o condiţie necesară este

0 5(4) — 8(B) d(4) — *d(B')* prin urmare 0 *p n;*

aşadar numărul termenilor lui *Q* (termenii intermediari putînd însă să aibă şi coeficienţi nuli) este cunoscut, este egal cu *n—p* +1. Scriem, prin urmare

Q = qnX + + ... + qp+1x^ + qpX».*

Vom calcula coeficienţii din aproape în aproape.

a) Operăm în ordinea gradelor descrescătoare, presupunînd mereu că *Q* există.

Introducem *Q = qnx^ + Qlt d^QJ n* — 1.

Din definiţia lui *Q* rezultă

A = qnx^B + Q|B, d{QxB} < n + d(B) = *d(A);*

prin urmare *qn* este cunoscut: este cîtul împărţirii coeficientului gradului cel mai mare din *A* la coeficientul gradului cel mai mare din *B.*

Dar atunci *Qi* verifică

$A_x = A - q_n x^n B = QjB,\ d(A_1) < d(A).$

Regăsim o operaţie de aceeaşi natură cu prima — pentru a calcula termenul de grad cel mai mare al lui *Qlt* adică termenul al doilea al lui *Q* şi aşa mai departe.

Deoarece gradele deîmpărţiturilor parţiale *A,* Ax, A_2,... descresc, este sigur că operaţia se opreşte; or, ea nu se poate opri decît dacă deîmpărţitul parţial obţinut la un moment dat

Ai = Ai-i - 9fX} tS

este de grad mai mic decît d(B).

Atunci sînt posibile numai două cazuri: sau acest A_{i} nu este polinomul nul O, şi atunci problema este imposibilă, fiindcă condiţiile folosite sînt necesare, sau *Ai* este

polinomul nul; în acest caz, adunînd membru cu membru identităţile folosite:

$$A = q_n x^n B +$$

$$Ax = q\hat{}x\hat{}B + A_2$$

$$A_{£\_X} = qjxiB + Q$$

obţinem

$$A = (q_n x^n + qn\text{-}iX^{11\,\prime 1} + \bullet\bullet\bullet +$$

prin urmare, polinomul calculat termen cu termen folosind condiţiile necesare, satisface condiţia din enunţ: condiţiile erau aşadar

suficiente. Prin urmare, atunci cînd problema este posibilă, ştim să calculăm acel unic polinom *Q* care satisface enunţul.

6) *Dacă operăm în ordinea gradelor crescătoare,* studiul este absolut analog. Presupunînd că operaţia este posibilă, introducem

$$Q = q_p x^p + Q[,\ 8(Qi) > p + 1,$$

şi deducem imediat

***A'*$_t$ = *A* — $q_p x^p B$ = *Q[B,* 8(ftB) >3(4), unde q_p este cîtul termenilor cu gradele cele mai mici din *A* şi *B.* După aceea, continuăm în mod analog. Dar de data aceasta numerele 8(4$_{\{}$) merg crescînd. Oare operaţia se opreşte? Dacă polinomul *Q* există, condiţiile noastre — care sînt necesare — dau coeficienţii lui *Q,* şi cînd vom fi găsit toţi termenii lui *Q,* ultimul deîmpărţit parţial va fi polinomul nul. Dacă problema este imposibilă, operaţia nu se opreşte, fiindcă 8(4$_4$), număr din ce în ce mai mare, este fireşte mai mare decît 3(B).**

EXEMPLU DE OPERAŢIE ÎN CAZUL ÎN CARE *Q* EXISTĂ:

***A* = x^5 + 3 î rr^4 + 0 -1 - 3 i +2**	***x*^{3} + 5**	***x*^{3} - 7**	***x* + 2**
a:^{2} + 3a: —2 / ***x?* -j- *2x* — 1**			
+ 2 - 2	***3?* + 5 - 6**	**x^2 - 7 + 4**	***x* -|- 2**
- 1 + 1	***x*^{3} - 3 + 3**	**^{x} + 2 — 2**	

Â$_3$ = £2

Tot astfel, în ordinea gradelor crescătoare

***A* = ix^5 + 3 *z*^{2} + 0 i**	***x*^{3} + 5 i *x*^{3} — *7* I *x* + 2 *x*^{3} + *3x* — *2* = *B*** / **+ lş +3i —2 - l-f^+a?»^**
***A{*= ' *x*^{s} -|- 3 i *x** + 0**	***s?* + 6 i *x*^{3} — 4 | *x*** / **- 6 + 4 |**

$4_3 =$ i x^5 + 3 i xt — 2 -1| -3I +2	a;^{3}

EXEMPLU DE OPERAŢIE IMPOSIBILĂ. Deşi condiţia 0 < 8(71) - 8(B) < d(A) - d(B) este verificată, obţinem:

în ordinea gradelor crescătoare:

A	$x^3 + 5$	x^2 -	$X + 1$	$3x^2 + x - 2 = B$
- 1	1 3	+1		1 . 14 — x H— f O
A-	+T 14 3	X^2-- 3 x -|- 1 14 9	+ 2 9	
		17 9	37	

Calculul se opreşte fiindcă

$d(A_s) < d(B)$.

în ordinea gradelor descrescătoare:

A =	*3?* + 5	x^2 — x 4- 1	$3x^2 + x - 2 = B$
	+1	+4 2 - 1	1 1 1 25 2 - ---------X 2 4 8
Ai =	X3 + 1 2 2	X^2 — - 2	*X*
3 4	1 4	+4 2	
1 ⊥T 4 , 75 . , 25 + — X < + — 8 8	, . 25 4 2 4	X^2	
A- , 75 . , 29 ^3= 4— x* H----- X^8 8 8			

Calculul continuă indefinit; termenul în x^{ft+1} din A_k nu poate dispărea.

REMARCI

1) Calculul în ordinea gradelor crescătoare presupune doar că

d(B), iar calculul în ordinea gradelor descrescătoare presupune doar că 8(-4)

2) Citurile de coeficienţi efectuate în cursul calculelor trebuie să existe; tocmai de aceea presupunem coeficienţii luaţi într-un corp. Totuşi, la împărţirea în ordinea gradelor descrescătoare nu se împarte decît la coeficientul puterii celei mai mari a lui *x* din *B:* dacă acest coeficient este 1, coeficienţii pot fi luaţi într-un inel (exemplu: împărţirea la o: — a). O situaţie analoagă la împărţirea în ordinea gradelor crescătoare, în ceea ce priveşte coeficientul termenului de grad cel mai mic din *B.*

Cele două moduri de calcul conduc la două analize foarte diferite pe care le vom examina pe rînd.

2. împărţirea euclidiană a polinoamelor. Calculul în ordinea gradelor descrescătoare ne dă, cu singura condiţie că *d(A) > > d(B),* o pereche de polinoame *Q* şi *R* care verifică

$$A\ BQ+ R,\ d(R) < d(B),$$

***R* este ultimul deîmpărţit parţial obţinut; el este £2 dacă *A* este un multiplu al lui *B,* adică dacă împărţirea, operaţie inversă înmulţirii, este posibilă.**

Unicitatea perechii *Q, R* rezultă din cele de mai sus, folosind observaţia că, în *A — R,* toţi termenii de grade mai mari decît *d(B)* sînt termenii lui *A.* De altfel, putem demonstra şi direct această unicitate, calculul precedent nemaiservindu-ne atunci decît pentru a demonstra existenţa unei perechi-soluţie:

$$\left.\begin{array}{l} A = BQ+ R,\ d(R) < d(B)\ ) \\ A = BQ' + R',\ d(R') < d(B)\ | \end{array}\right. \Rightarrow B(Q—Q') + (R-R')=Ci$$

Or, dacă *Q — Q'* nu este Q, gradul primului termen este mai mare sau egal cu d(B), în timp ce *d(R — R')* este mai mic decît d(fî); suma nu poate fi Să. Prin urmare, *Q* e= *Q',* de unde rezultă *R = R'.*

Ca şi la împărţirea întregilor, Q şi R se numesc respectiv *cîtul* şi *restul* operaţiei care poartă numele de *împărţire euclidiană:*

într-adevăr, algoritmul lui Euclid este posibil. Considerăm şirul de împărţiri:

$$A = BQ + R,\ d(R) < d(B);$$

$$B\hat{}RQX\hat{},\ d(R_1) < d(R);$$

$$R = R1Q2 + -\hat{}2, \qquad d(R_2) < d(Rj)$$ **etc.**

Deoarece gradele resturilor succesive descresc, algoritmul se termină în mod necesar: or, inegalitatea gradelor este tocmai condiţia suficientă ca operaţia să fie posibilă! Prin urmare, singurul caz în care împărţirea nu este posibilă este cel în care se obţine £1 ca rest. Aşadar, acest caz survine după un număr finit de operaţii, şi algoritmul se termină totdeauna cu)

$$Rn\text{-}1 = RnQn+1\ \mathrm{H}^{-}\ \hat{}\mathrm{n}_{+1},$$

$$R\text{-}n = Rn+iQn+z\text{-}]$$

Să numim D **ultimul rest nenul** R_{n+1}**. Exact ca la întregi, se arată că există (cel puţin) o pereche de polinoame** X **şi** Y **care verifică** $XA+ YB = D.$

Aceste analogii ne c onduc la considerarea următoarei probleme:

DIVIZIBILITATEA POLINOAMELOR. Spunem că un polinom A este divizibil cu un polinom B **dacă împărţirea euclidiană dă** R **r= D, adică dacă există** Q **astfel încît**

$$A = BQ.$$

Să remarcăm însă că

$$A \equiv BQ \iff A \equiv (\lambda B)\left(\frac{1}{\lambda}\right.$$

unde X este un număr oarecare nenul.

EXEMPLU:

$$x^2 - 4 = (x - 2)\ (z + 2) = \qquad (3,+ 6).$$

Prin urmare, pentru a construi o teorie acceptabilă a divizibi- lităţii, trebuie să considerăm echivalente polinoamele ale căror coeficienţi sînt proporţionali (polinoame neindependente, din punctul de vedere al

spaţiului vectorial). Elementul neutru al

înmulţirii este atunci nu numai la:^{0} (pe care îl scriem 1), ci şi *Xx°* (pe care îl scriem X), un număr real arbitrar nenul.

Ca şi la întregi, relaţia *„A* este multiplu al lui *B"* sau *„B* divide pe *A"* este o relaţie de ordine, fiindcă există tranzitivitate:

$$\begin{matrix} \textbf{3*2 : A = } \boldsymbol{BQ} \\ \boldsymbol{3S} \textbf{ -. } \boldsymbol{B = CS} \end{matrix} \qquad \textbf{[3T : } \boldsymbol{A = CT]},$$

în plus, dacă un polinom divide alte două polinoame, el divide şi suma lor. Prin urmare, rămîn valabile toate consecinţele algoritmului lui Euclid, inclusiv concluzia: dacă *D* este ultimul rest nenul, mulţimea polinoamelor divizori comuni ai lui *A* şi *B* este mulţimea divizorilor lui *D.* Acest polinom este polinomul divizor comun de gradul cel mai mare (fiindcă divizorii lui, dacă ei există, sînt de grad mai mic decît el). El se numeşte, prin analogie cu întregii, *cel mai mare divizor comun al lui A fi B.*

Spunem că *A* şi *B* sînt *primi între ei* dacă divizorul lor comun cel mai mare este elementul neutru al înmulţirii, adică, în cazul de faţă, Xa:^{0}. Restul următor în algoritm este, în mod necesar Q.

Ca şi la întregi, se demonstrează teorema fundamentală: *dacă un polinom divide un produs de două polinoame fi este prim cu unul din ele, îl divide pe celălalt.*

Ne rămîne deci să întocmim lista completă a divizorilor unui polinom. Aici însă analogia cu întregii dispare: nu putem încerca toate polinoamele de grade mai mici fiindcă, de fiecare grad dat, există o infinitate nenumărabilă de polinoame.

Cum putem stabili că un polinom este sau nu factorizabil, şi, în cazul afirmativ, cum putem găsi toate descompunerile lui?

în primul rînd, trebuie să înţelegem clar că *posibilitatea de a descompune un polinom depinde de corpul în care sînt luaţi coeficienţii:* de exemplu, dacă *a* este un număr *pozitiv,* avem

$$\textbf{o:}^2 \textbf{ — } \boldsymbol{a = (x —} \textbf{ |/}\boldsymbol{a)\ (x +} \textbf{ |/a).}$$

descompunere totdeauna posibilă dacă corpul coeficienţilor este mulţimea numerelor reale, dar nu totdeauna dacă acesta ar fi mulţimea numerelor raţionale.

Presupunînd în continuare pe *a* pozitiv, se vede uşor că x^2 -/- *a* nu este factorizabil: într-adevăr,

$$x^2 \text{ -j- } a = (ux + v)\,(u'x + v') = uu'x^2 + \{uv' + w'®)o: + vv'$$

cere, aşa cum rezultă din condiţia de identificare,

$$uu' = 1 > 0,\ vv' = a > 0,\ uv' + {}''i) = 0,$$

condiţii incompatibile în corpul numerelor reale.

***Singurele polinoame absolut nefactorizabile sînt polinoamele de gradul* 1; deci polinoamele comparabile cu numerele prime sînt aceste polinoame simple ; dar nu toate polinoamele pe corpul numerelor reale sînt factorizabile într-un produs de factori de gradul întîi. Adăugăm că a fost creat, prin extensie, un corp mai cuprinzător decît cel al numerelor reale şi care se numeşte *corpul numerelor complexe* (sau imaginare), astfel încît toate polinoamele pe acest corp sînt produse de factori de gradul întîi. Analogia cu întregii este atunci perfectă, din punctul de vedere care ne interesează aici (vezi Cartea a IlI-a, cap.7).**

Cele spuse mai sus nu sînt suficiente pentru a recunoaşte, în cazul general, dacă un polinom este sau nu factorizabil. Tot ceea ce ştim, este să stabilim dacă un polinom este divizibil cu un polinom *dat*
— făcînd împărţirea, în cazul general, sau folosind o regulă mai simplă dacă acest polinom dat este de gradul întîi (divizibilitatea cu *x* — a).

3. împărţirea în ordinea puterilor crescătoare. Studiul este cu totul diferit de cel precedent, în care n-am considerat decît un singur rest privilegiat: ultimul rest al împărţirii, resturile intermediare fiind deîmpărţiturile parţiale. Acum însă operaţia se continuă indefinit şi trebuie s-o analizăm în fiecare etapă. (A nu se face confuzie cu algoritmul lui Euclidl noi vorbim de o împărţire: aşadar, divizorul rămîne mereu acelaşi.)

Amintim că procedeul de calcul este următorul.

Se presupune că polinoamele A şi *B* sînt astfel încît S(A) —

— 8(B) = *p* este pozitiv. Determinăm

q_p astfel încît $A[== A — q'_p x^p B$ verifică S(AJ) > p, astfel încît $A_2 = A[— q'_{p+1} x^{p+1} B$ verifică S(Aj) > 8(Aj) şi aşa mai departe.

Scoţînd în factor termenul de grad cel mai mic din *B,* putem reduce problema la cazul 8(B) = 0, sau putem presupune că termenul de grad cel mai mic din *B* este lx° = 1. Atunci condiţiile scrise exprimă că *q'* este ales astfel încît să facă să dispară din Aj termenul de grad *p; q_{p+1}* este astfel ales încît să facă să dispară din A_2 termenul de grad *p* -ţ- 1 etc.

Prin urinare, dacă este mulţimea termenilor obţinuţi pînă la etapa care dă

$$<?'< = Q'P^{xP} + q'_{P+1} i^{xP+1} + \bullet\bullet\bullet + qp_{+i} x^{p+i},$$

$$= {}^{A} i - q'p_{+i}{}^{xP+iB\prime} W > p + i-$$

Obţinem

$$4 = B<?'_i + {}^{\wedge}{}_{+l}. 8(A;_{+1}) > d(Q').$$

Să definim deci operaţia: fiind date polinoamele *A* şi *B* cu 3(B) = 0 şi alegînd un întreg *n,* definim polinoamele *Q'* şi *A'* prin

$$A = BQ' + A', d(Q') = n, 8(4') > n.$$

Unicitatea soluţiei rezultă din condiţiile necesare puse în evidenţă. Putem totuşi da şi o demonstraţie directă: fie o pereche *{Q", A"}* care verifică aceleaşi condiţii, cu acelaşi număr *n;* prin scădere obţinem:

$$B(Q' — Q") + (A' — A") \,{}_{s}\, O, d(Q' - Q") < n.$$

Atunci

$$8(B) = 0$$

implică

$$8[B«>'- (?')] < n,$$

prin urmare

$$8(4' — A") < n,$$

inegalitate care nu este compatibilă cu

$$8(4') > n,\ 8(4') > n$$

decît dacă avem

$$4' = A''$$

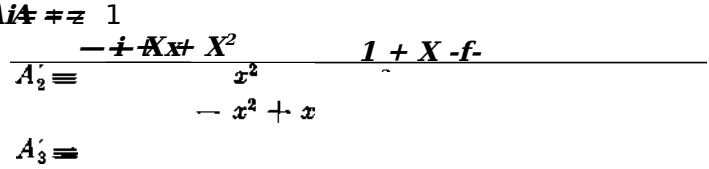
şi, ca o consecinţă,

$$Q' = Q''\text{-}$$

Operaţia ne furnizează identităţi foarte importante, pe care le vom regăsi cînd vom studia fracţiile raţionale. Cele mai remarcabile sînt cele în care divizorul este de forma $|x + 1$.

EXEMPLU. ***A = 1, B*** **=3** ***—x*** **+ 1. Efectuăm operaţia după**

următoarea schemă:



1 == (1 — ***x)*** **(1) +** ***x, n*** **= 0**

1 = (1 — ***x)*** **(1 4-** ***x)*** **+** x^2**,** ***n = 1***

1 = (1 — ***x)*** **(1 +** ***x*** **+ -z^2) +** $^{x}\backslash$ ***n = 2***

1 == (1 — a:)(l + ***x +*** x^2 **+ ... +** x^n**) +** x^{n+1}**,** ***Vn*** **întreg**

Dar legea de succesiune a coeficienţilor nu mai apare la simplu cînd divizorul este un polinom oarecare!

IV. Fracţii raţionale cu o nedeterminată

Aşa cum un număr raţional se defineşte cu ajutorul perechilor de întregi, pe baza relaţiei de echivalenţă

$$\frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'} \iff ab' = ba'$$

fel de tot astfel, plecînd de la perechi de polinoame, se introduce ***fracţia raţională algebrică***

$$\frac{A}{B} \sim \frac{A'}{B'} \iff AB' = BA'.$$

Din motive tipografice, vom scrie uneori ***A/B.***

în particular, dacă ***A*** **este un multiplu al lui B, adică dacă există un polinom** ***Q*** **astfel încît** ***A = BQ,*** **avem** ***A/B =***

Q.

Dacă *A* nu este multiplu al lui B, împărţirea euclidiană

$$A = BQ + B,\ d(B) < d(B)$$

dă

$$\underset{B}{+} \qquad \underset{B}{d(R)<d(B).}$$

O asemenea identitate (adică: egalitate pentru orice valoare a lui *x)* se dovedeşte foarte importantă în studiul funcţiilor şi al graficelor acestora. Inegalitatea referitoare la grade va arăta că pentru valorile lui *x* foarte mari în valoare absolută, valoarea luată de fracţia raţională din membrul al doilea este mică, aşa că polinomul *Q(x)* dă atunci valori aproximative satisfăcătoare.

împărţirea în ordinea gradelor crescătoare, oprită în etapa în care cîtul este de grad *n,* dă

$$-4 = BQ_n + B_n,\ 8(B_n) > d(Q_n),$$

presupunînd că

$$S(B) = 0,$$

de unde deducem

$$\underset{B}{+} \qquad \underset{B}{8(B_n)>d(Q_n).}$$

Identitatea are deci forma

$$\frac{A}{B} \equiv (c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n) + \frac{x^{n+1}\ (\gamma_0 \div \gamma_1 x + \ldots + \gamma_k x^k)}{b_0 + b_1x \div \ldots \div b_p x^p} \qquad (1)$$

cu $b_0 = j = 0$.

Dacă atribuim lui *x* o valoare a foarte puţin diferită de 0, fracţia raţională din membrul al doilea dă, pentru *n* suficient de mare, valori mici (ca urmare a prezenţei factorului a:$^{n+1}$), aşa că polinomul Q_n dă o bună valoare aproximativă a valorii Iui A(a)/B(a).

Toate acestea vor fi formulate mai precis în Analiză, după ce vom studia limitele. Deocamdată spunem doar că a scrie fracţia raţională sub forma (1) înseamnă „a *dezvolta*

fracţia raţională după puterile lui x pînă la ordinul n".

Teoria divizibilităţii polinoamelor conduce la proprietăţi importante ale fracţiilor raţionale: ea rezolvă problema simplificării fracţiilor raţionale prin împărţirea celor doi termeni cu un divizor comun. Ea face posibile, de asemenea, o serie de transformări foarte utile în analiză; de exemplu, am văzut că dacă *A* şi *B* sînt polinoame prime între ele, algoritmul lui Euclid dă două polinoame *X* şi *Y* astfel încît *AX + BY* = 1; aceasta înseamnă că putem obţine descompunerea în sumă

$$\frac{1}{AB} = \frac{A}{B} - \frac{AB}{A} \quad \text{de unde} \quad \frac{1}{AB} = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \quad ? \blacksquare$$

V. Polinoame şi fracţii raţionale cu mai multe nedeterminate

Un polinom cu mai multe nedeterminate este o expresie care este un polinom în raport cu fiecare nedeterminată, coeficienţii respectivi fiind luaţi în inelul polinoamelor formate cu celelalte nedeterminate. El este prin urmare o sumă de monoame, adică o sumă de produse de forma

$$ax?x_t^* \dots x_n^{>},$$

unde »i, a_2, ..., «$_n$ sînt întregi pozitivi sau nuli. Numerele *a* sînt *coeficienţii* polinomului. *Gradul* polinomului este cel mai mare dintre numerele + a_2 + ... + a_n care corespund unui coeficient nenul.

Teoremă. *Dacă un polinom P ia valoarea* 0 *oricare ar fi valorile atribuite nedeterminatelor, toţi coeficienţii lui sînt nuli.* într-adevăr, teorema este adevărată pentru o nedeterminată şi se demonstrează prin recurenţă, fiindcă coeficienţii polinomului considerat drept un polinom în x_t sînt polinoame cu *n* — 1 nedeterminate care se anulează, şi ele, pentru orice valori ale acestor nedeterminate.

Prin urmare, teorema fundamentală cu privire la polinoamele identice rămîne valabilă.

în ceea ce priveşte divizibilitatea, vom demonstra numai

teorema următoare, pe care o enunţăm mai întîi pentru două nedeterminate *x* şi *y.*

Teoremă. *Dacă un polinom P cu două nedeterminate x şi y ia valoarea* 0 *pentru x* = a, Vy *şi pentru* y = p, Va;, *el este divizibil cu (x* — a)(y — P).

într-adevăr, am remarcat că împărţirea la a: — a a polinomului cu o variabilă nu necesită nici o împărţire de coeficienţi. Prin urmare, dacă considerăm *P* drept un polinom în *x* cu coeficienţii aparţinînd inelului polinoamelor în *y,* putem face împărţirea. Deoarece polinomul este nul pentru *x* = a, această împărţire dă

$$y) == (x — tfQ\hat{}x, y).$$

Dar *P(x,* Ş) este nul oricare ar fi *x,* în particular este nul pentru *x* =*{=* a, prin urmare *Qi(x,* p) este nul oricare ar fi *x,* ceea ce dovedeşte, ca mai sus, că *Q^x, y)* este divizibil cu *y* — p:

$$y) \blacksquare Qi(^{x}> y) = (y — P) \&(*> y)-$$

Deducem de aici

$$P(x, y) == (x — a)(y — P)\hat{}\hat{}, y).$$

Generalizarea la un număr oarecare de nedeterminate se face fără dificultate. Trebuie notat, de altfel, că în demonstraţia precedentă polinoamele considerate în *x* şi *y* pot avea coeficienţii luaţi în inelul polinoamelor referitoare la alte nedeterminate ^{z}l> ^{z}2, •••) ^{z}n-

însă teoria bazată pe împărţirea euclidiană şi pe algoritmul lui Euclid nu mai este aplicabilă, aşa cum rezultă clar din exemplul următor: polinoamele de două nedeterminate *P = x* şi *Q = y* ar trebui considerate, evident, ca fiind prime între ele; or, nu există nici o pereche de polinoame *X(x, y}* şi *Y(x, y)* care să asigure echivalenţa

$$xX(x, y) + yY(x, y) = 1,$$

fiindcă primul membru nu poate avea un termen de grad 0.

Fracţiile raţionale cu mai multe variabile se definesc

pornind de la polinoame ca în cazul unei singure nedeterminate.

Metoda coeficienţilor necunoscut!. Teorema despre identitatea polinoamelor se dovedeşte utilă în probleme de tipul următor:

Care este condiţia ca *P = x* + ax²y² + by^i + cx²* -f- *dy²* -f- *e* să fie divizibil cu *x² +* 3i/² — 1?

Examinarea gradelor ne arată că, dacă există, cîtul este de forma *ux² + vy² + w;* coeficienţii lui sînt necunoscuţi. îl determinăm *identificînd P* şi produsul

$$(x^2 + 3*/^2 - 1)\ (ux^2 + vy^2 + w)$$

şi pentru aceasta *egalăm* coeficienţii termenilor asemenea.

$$u = 1$$

$$v = -\frac{}{3}$$

$$w = -$$

u - 1
3u + *v* = *a* 3*v* = *b w*
— *u* = *c* 3*w* — *v* = *d*
— *w* = *e*

Aşadar, doi coeficienţi rămîn arbitrari, de exemplu *b* şi *e.* în funcţie de ei deducem valorile necesare pentru *a, c, d,* iar

$$d = -\left(3e + \frac{b}{3}\right)$$

citul este

$$x^2 \text{ -|- y } y^2 - e.$$

VI. Notă despre introducerea trigonometrici în problemele de algebră.

Rigiditatea formulelor referitoare la polinoame şi fracţii raţionale este o calitate preţioasă, fiindcă face din fiecare pdlinom un obiect matematic care nu poate fi înlocuit cu un altul; identităţile se verifică prin comparare termen cu termen, *cu condiţia ca literele care figurează să fie independente,* adică să nu fie legate prin vreo relaţie care impune valori anumitor litere, cînd valorile altor litere sînt date. (Pentru a verifica o identitate, trebuie să avem totdeauna grijă să nu lăsăm în expresia ei decît litere independente.) Din contra, supleţea formulelor trigonometrice permit dirijarea calculelor în vederea atingerii unor obiective determinate: evitarea radicalilor, punerea sub formă de produs, scăderea gradului etc. De aceea se întîmplă foarte frecvent să fie avantajos să introducem în calculele algebrice anumite *unghiuri auxiliare,* şi aceasta chiar independent de existenţa unei interpretări geometrice adecvate, care uneori, este suficientă pentru a justifica procedeul.

1. **Un singur număr. Oricare ar fi numărul *a,* îi putem totdeauna asocia un unghi a prin relaţia *a* = tga;**

corespondenţa devine biunivocă dacă îi adăugăm condiţia — rc/2 < a < K/2.

Dacă *a* este cuprins între — 1 şi +1, putem pune

***a* = cos oc, 0 a < 7r sau *a* = sin a,** — TC/2 **< a** TC/2 .

Procedeul se aplică mai ales pentru a evita introducerea rădăcinilor pătrate, graţie formulelor

$$1 + tg^2a - \frac{}{\cos^2 a}, \quad 1 - \cos^2 a = \sin^2 a, \quad \frac{}{\cos^2 a} - 1 = tg^2 a$$

care permit să se evite extragerea rădăcinii pătrate din polinoamele

$$1 + X^2, \quad 1 - X^2, \quad X^2 - 1,$$

şi, în consecinţă, din orice nolinom de gradul doi, pe baza identităţii care transformă *ax*² -/- *bx* -f- *c* într-o sumă sau într-o diferenţă de pătrate, dintre care numai unu] conţine pe *x*.

2. **Două numere. *Se defineşte o corespondenţă biunivocă între perechile* (a, *b) de numere reale şi perechile* (r, a) *formate dintr-un număr real şi un unghi, cu ajutorul formulelor***

$$a = r \cos a, \quad b = r \sin a$$

***unde* /te 0 a < 7t, /te r 0, 0 a < 27t.**

în ambele variante, tga =$\frac{}{a}$, după care se calculează *r* din una din egalităţile scrise, însă în primul caz unghiul este determinat şi semnul lui *r* se deduce în concordanţă cu a, în timp ce în cazul al doilea a trebuie ales în aşa fel îneît cos a să aibă semnul lui *a* (ceea ce face ca, automat, sin a să aibă semnul lui 6.) Fireşte, în ambele cazuri $r^2 = a^2 + b^2$.

EXEMPLE DE APLICAŢII Fie

$$^{P}k^{x}, \ V) \ sz \ ax + by$$

Introducînd *r, ct,* p, 9 prin

$$(\ a = r \cos a \qquad x = p \cos 9$$

***b* — *r* sin a *y* = p sin 9**

polinomul *P(x, y)* devine

rp cos(9 — a).

în mod analog,

$$a(x^2 - y^2) + 2bxy$$

devine

$$rp^2 \cos (2<p - a).$$

Polinoamele omogene în *x* şi *y* (adică cele care au toţi termenii de acelaşi grad) şi fracţiile raţionale care au ca termeni asemenea polinoame se transformă introducînd multipli ai unui arc, ceea ce coboară gradul expresiei.

EXEMPLU

$$E = ax^2 + bxy + cy^2,$$

prin

$$x - p \cos <p, u = p \sin q>$$

devine

$$E = |- [(a - c) \cos 2<p + b \sin 2<p + (a + c)].$$

Introducînd atunci

$$a - c = r \cos a, \; b = r \sin a,$$

obţinem

$$£ = [\cos (2<p - a) + \quad \bullet$$

în cazul în care (a + c)/r < 1, putem introduce în continuare *(a + c)lr = cos* P şi obţinem

$$E = r\rho^2 \cos \left(\varphi - \frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos \left(\varphi\right.$$

Vom alege totdeauna forma cea mai adecvată în funcţie de scopul urmărit.

3. Introducerea tangentei. în cazul fracţiilor raţionale în cos a şi sin a care au la numărător şi numitor polinoame omogene de acelaşi grad, se introduce pur şi simplu tg a — după împărţirea celor doi termeni cu o putere convenabilă a lui cos a. Dar înlocuirea aceasta este posibilă şi în cazuri mai generale, dacă expre- sîile pot fi reduse la cazul omogen cu termeni de acelaşi grad, folosind identitatea

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

care permite modificarea gradului, păstrînd paritatea termenilor.

EXEMPLU

$$\cos^3 a - \sin a\,[\cos^3 a - \sin a(\cos^2 a + \sin^2 a)]\,(\cos^2 a + \sin^2 a)$$

$$2\cos^3 a + \sin^3 a \qquad 2\cos^3 a + \sin^3 a\,(\cos^2 a + \sin^2 a)$$

$$\underline{[1 - \operatorname{tg} a(1 + \operatorname{tg}^2 g)]\,(1 + \operatorname{tg}^2 a)} \quad 2 + \operatorname{tg}^3 a\,(1 + \operatorname{tg}^2 a)$$

după care putem reveni la algebră introducînd tg a = *t.*

4. Cazuri de simetrie sau de pseudosimetrie-Aşa cum în algebră, atunci cînd există simetrie între *x* şi *y,* introducem suma şi produsul, *x + y = s, xy = p* şi considerăm că *x* şi *y* sînt perechea de rădăcini ale ecuaţiei $u^2 - su + p = 0$, tot aşa, atunci cînd este vorba de două unghiuri <p şi cp care intervin simetric, introducem suma şi diferenţa lor (sau, mai adesea, semisuma şi semi- diferenţa), aceasta din urmă apărînd printr-un cosinus, pentru a respecta simetria - Vom spune că există pseudosimetrie dacă simetria este violată numai prin cîteva schimbări de semne care sînt astfel încît putem încă introduce suma şi diferenţa unghiurilor, aceasta din urmă apărînd însă nu numai prin cosinusul ei, ci şi prin sinusul ei.

Caz particular. EXPRESIE SIMETRICĂ 1N sin<p ŞI cos<p. Ea este (simetrică în <p şi — <p, aşa că introducem <p — y folosind

$$\cos <p + \sin <p = \sqrt{2} \cdot \cos - y$$

Ş’

$$\cos q> \sin <p = \sin 2 <p = y \cos 2 (<p - y$$

(ceea ce revine la schimbarea originii unghiurilor, luînd ca nouă origine prima bisectoare a axelor vechi).

După aceea revenim la algebră notînd

$$\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$$

de unde

cos <p + sin <p — |/2 u, cos <p sin cp = u² .

Dacă păstrăm <p- $\frac{}{4}$ **--- tp, obţinem**

cos <p 4- sin <p =]/2 cos cos <p sin 9 = ~ cos

şi, de asemenea

cos <p — sin <p = — |/ 2 sin

Trebuie însă spus că numai o experienţă suficientă în ceea ce priveşte calculele trigonometrice poate permite folosirea cu oarecare virtuozitate a acestor procedee.

CAPITOLUL 2

REZOLVAREA ECUAŢIILOR

I. Definiţii

în cele ce urmează, literele *P, Q, ...* vor desemna, dacă nu se va specifica altfel, polinoame, sau fracţii raţionale sau — într-un mod mai general — expresii algebrice sau chiar trigonometrice pentru care operaţiile folosite au fost definite. Se presupune că aceste expresii iau valori numerice bine determinate pentru orice sistem de valori x_0, y_0, z_0, ... ale nedeterminatelor *x, y, z, ...*care figurează în ele. Pentru a simplifica scrierea, vom presupune trei nedeterminate. Valoarea numerică $P(x_0, y_0, z_0)$ va fi notată P_o.

Coeficienţii expresiilor sînt luaţi într-o submulţime £ a numerelor reale; valorile atribuite nedeterminatelor sînt luate într-o mulţime & a numerelor reale, care poate fi £ sau o extensie a lui £: de exemplu, presupunînd coeficienţii întregi, acceptăm pentru nedeterminate valori raţionale, sau valori de forma *a + b]/%,* cu *a, b, c* raţionale, sau acceptăm orice număr real.

Presupunem deci £ C 8 C â.

Identitate. Dacă, oricare ar fi sistemul de valori x_0, y_0, z_0 din $ atribuite nedeterminatelor, $P(x_0, y_0, z_0) = Q(x_0, y_0, z_0)$, vom spune că, pe 8, expresiile P(z, *y,* z) şi

Q(x,y,z) **sînt** ***identice.*** **Aceasta se scrie** ***P(x, y,*** **z) =** ***Q(x, y>*** **z), dacă 8 a fost definit în prealabil.**

EXEMPLU: x = ***]/x²*** **dacă 8 este mulţimea numerelor reale pozitive, dar este fals pe mulţimea numerelor reale de semne oarecare.**

Ecuaţie. în general, două expresii nu sînt identice; atunci se pune problema de a şti pentru care sisteme de valori ale nedeterminatelor, ***P*** **şi** ***Q*** **iau aceeaşi valoare numerică. A găsi toate mulţimile {;r₀, j/₀, z₀| astfel încît P₀ =** ***Q₀*** **înseamnă** ***a rezolva, ecuaţia***

$$P(x, y, z) = Q(x, y, z).$$

Fiecare mulţime {;r₀, ***y₀,*** **z₀} se numeşte** ***o soluţie a ecuaţiei.***

în mod analog, ***a rezolva un sistem de ecuaţii***

$$P=Q$$
$$R = S$$
$$L = M$$

înseamnă a căuta toate mulţimile de valori (a:₀, ***y₀,*** **z₀) care sînt soluţii ale tuturor ecuaţiilor. Fiecare din aceste mulţimi se numeşte** ***o soluţie a sistemului.***

în cele ce urmează, vom presupune că mulţimea (2 în care sînt luaţi coeficienţii este un ***corp*** **(este posibilă împărţirea, cu excepţia împărţitorului zero). Valorile atribuite nedeterminatelor — care aici se numesc** ***necunoscute*** **— sînt luate în mulţimea** ***6*** **care rămîne să fie precizată; astfel, putem examina existenţa şi numărul soluţiilor ecuaţiilor**

$$2x + 3 = 0,\ x^2 - 4 = 0,\ x^2 - 3=0,\ x^2 + 3 = 0$$

în mulţimile ***N, Z, Q⁺, Q*** **sau** ***R.***

Ultima ecuaţie are două soluţii dacă S este mulţimea numerelor complexe (Cartea a III-a, cap. 7).

II. Echivalenţa ecuaţiilor

Spunem că două ecuaţii sînt echivalente în raport cu o aceeaşi mulţime S dacă ele au aceleaşi soluţii în această mulţime. **O definiţie analoagă pentru sisteme.**

REMARCĂ. Din punctul de vedere axat pe noţiunea de mulţime, ecuaţiile

$x^2 - 4 = 0$ **şi** $x - 2 = 0$ **sînt echivalente în** R^*,

$x - 2 = 0$ **şi** $(x - 2)^2 = 0$ **sînt echivalente în** R.

Dar în geometria curbelor algebrice studiate pe ecuaţiile lor, sistemele

y =2°	f y = o	I y = ⁰
I y = a? — 2 ’ j	y -- (x — 2)², ’ j	= (a> — 2)², ’

corespund unor situaţii distincte din punctul de vedere al *ordinului de multiplicitate* (Cartea a Il-a, Partea a Il-a, cap.l) şi al *contactului* (Cartea a IlI-a, cap. 3). în acest caz, numai teorema IV din cele care urmează este adecvată.

în cele ce urmează, adoptăm punctul de vedere bazat pe noţiunea de mulţime.

Presupunem mulţimea S specificată, aşa căP, *Q, ...* sînt definite, ele iau valori determinate P_o, Q_o, ... pentru toate valorile atribuite nedeterminatelor în De pildă, dacă intervine un radical, expresia din care se extrage rădăcina pătrată trebuie să fie nenegativă pentru orice element din g. De asemenea, nici un numitor nu trebuie să se anuleze. Aceste valori interzise se exclud încă înainte de analiză.

Teorema I. *Oricare ar fi expresia R, ecuaţiile P = Q* şi *P + R = Q + R sînt echivalente.*

într-adevăr, operaţiile cu expresiile au fost alese cu aceeaşi structură ca operaţiile cu numerele, aşa că

$$[P_0 = 0>] \ ^{<=s>} \ [Po + Po = @0 + Po]$$

Teorema II. Cunoaştem implicaţia

$$[Po - Col \quad [PoPo \ ^{=} \ OA] >$$

dar implicaţia inversă *se descompune*^

[P_0R_0 =* &Po] [Po = 0 sau (neexclusiv) $P_o = (*_0]$

(Prin „neexclusiv“ vrem să spunem că cele două posibilităţi nu se exclud în mod necesar; ele pot fi adevărate simultan.)

De unde enunţurile:

1) *Ecuaţia PR = QR se descompune în R* = 0 şi *P = Q.* Altfel spus, mulţimea soluţiilor lui *PR = QR* este reuniunea mulţimii soluţiilor lor P = 0 şi a mulţimii soluţiilor lui *P = Q.*

2) Dacă *R* nu ia valoarea 0 pe &, ecuaţiile *PR — QR* şi *P = Q* sînt echivalente.

Teorema III. Ştim că

■Po = (?o [Po = *Qo* sau $P_o = — @_0$]

de unde enunţurile:
1) *Ecuaţia P^2 -- Q^2 se descompune în P - Q* şi *P = — Q.*
2) Pe o mulţime în care P_o şi Q_o au acelaşi semn, ecuaţiile $P^2 = Q^2$ şi *P = Q* sînt echivalente.

Aplicaţii ale acestor teoreme. 1) Posibilitatea de a găsi o ecuaţie cu 0 în membrul al doilea, echivalentă cu o ecuaţie dată. („Trecem toţi termenii în unul din membri".)
2) înlocuirea unei ecuaţii cu numitori printr-o ecuaţie fără numitori. Dacă membrii erau fracţii raţionale, cei ai ecuaţiei nou formate sînt polinoame. Ecuaţia se numeşte atunci *ecuaţie întreagă.* Ea se scrie *P* = 0, unde *P* este un polinom.
3) Sesizarea posibilităţii de a descompune o ecuaţie.
4) Trecerea de Ia o ecuaţie care conţine una sau două rădăcini pătrate, la o ecuaţie fără radicali: în acest scop, se izolează un radical, apoi se ridică cei doi membri la pătrat: dacă radicalul era unic, el dispare; dacă mai există un radical, rămîne numai unul şi procedeul este aplicat din nou. Dar dacă existau 3 radicali, atunci.— în general — rămîn tot atîţia. Obligaţia de a studia semnele — ceea ce uneori este destul de complicat — justifică REGULA PRACTICĂ: ÎN PROBLEMELE DE MATEMATICĂ ELEMENTARĂ, NU TREBUIE NICIODATĂ INTRODUŞI RADICALI DIN NECUNOSCUTE.

De exemplu, a scrie a: > 3, [/a; — *3 = x a* **(cu intenţia de a-i găsi soluţiile) înseamnă a adopta o metodă greşită de a rezolva sistemul**

$$3/^{a} = x — 3 \qquad y = x + a$$

care trebuie transformat în

$$x = y — a \qquad y^2 = y — a — 3 \qquad y > o$$

> 0

De remarcat că *x* > 3, |/*x* — 3 =:r-|-a este echivalent

cu

$$x + a \neq 0, \qquad (a; -3) = (a: + a)^2$$

ceea ce face inutilă păstrarea inegalităţii $x > 3$ care e asigurată automat de ecuaţie.

Teorema IV. Teorema combinaţiei liniare.

$$\text{ţP=O} \quad \text{este echivalent} \quad (aP + bQ = 0 \quad \text{cu condiţia}$$

Exprimăm deci că *Q* intervine efectiv în combinaţie. Demonstraţia este imediată, după modelul de mai sus.

Teorema V. Teorema substituţiei

$$\text{(I)} \quad \begin{array}{l} x = F(y, z) \\ P(x, y,z) = 0 \\ Q\{x, y, z) = 0 \\ \text{(II)} \end{array} \quad \text{este echivalent cu} \quad \begin{array}{l} x = F(y, z) \\ P[F(y, z), y, z] = 0 \\ Q[F(y, z), y, z] = 0 \end{array}$$

$$S(x, y, z) = \qquad S[F(y,z), y,z] = 0$$

A trece de la (I) la (II) înseamnă *a elimina pe x între ecuaţii,* adică a forma un sistem în care numai una din ecuaţii îl conţine pe *x-,* din celelalte ecuaţii această literă *x* a dispărut. Teorema IV este folosită, între altele, şi la efectuarea unor asemenea eliminări.

A trece de la (II) la (I) înseamnă *a introduce pe x ca necunoscută auxiliară.*

Pentru a introduce o necunoscută auxiliară *x = F(y,* z), expresia *F* trebuie în prealabil pusă în evidenţă în ecuaţiile în *y* şi. z.

EXEMPLU. Ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$, $a = f = 0$.

Primul membru se poate scrie şi sub forma

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

Putem deci introduce necunoscuta auxiliară *u* definită prin *u = x -ţ- bfla* şi putem folosi

$$x = u - \frac{b}{2a}$$

echivalent

$$u^2 \qquad 6^2 -$$

$ax^2 + bx + c = 0$ i ^{b}

$U = X\text{-}f\text{-} \frac{}{2a}$

REMARCĂ. Introducerea unei necunoscute auxiliare udate pr intr-o relaţie *u = x + h* se poate face înlocuind pe *x* cu binomul *u —h.* Tot astfel putem introduce o necunoscută auxiliară *u* prin

$x = f(u)$, dar se poate întîmplă ca valori distincte ale lui u să dea o aceeaşi valoare a lui x; în asemenea cazuri se precizează mulţimea în care este luat u în aşa fel încît să se asigure o *corespondenţă biunivocă între x şi u.* De exemplu, dacă introducem unghiul u prin x = cos u, vom impune $0 < u < n$.

III. Ecuaţii şi sisteme clasice

A) Ecuaţii fundamentale

(8 este aici mulţimea numerelor reale).

1) ECUAŢIA AFINĂ CU O NECUNOSCUTĂ: $ax + b = 0$

$a \neq 0$ [a: = — i/a: o soluţie

b 0 nici o soluţie (imposibilitate)

® $b = 0$ orice x_0 este soluţie (nedeterminare).

2) ECUAŢIA BINOMĂ: $x^n = k$, n întreg pozitiv.

$k > 0$ [n impar $x = \sqrt[n]{k}$ **o soluţie**

n par { $x = -\sqrt[n]{k}$ **doua solutn**

$k < 0$ [n impar $x = -\sqrt[n]{-k}$ **o soluţie**

n par **nici o soluţie**

$k = 0$ $x = 0$ **o soluţie.**

3) SISTEM DE DOUĂ ECUAŢII AFINE CU DOUĂ NECUNOSCUTE:

$$ax + by + c = 0$$
$$a'x + b'y + c' = 0$$

Dacă unul din coeficienţii necunoscutelor este nenul, de exemplu $a \neq 0$, folosirea teoremei IV sau a teoremei V permite eliminarea lui x şi reduce totul la o ecuaţie în y care fie admite o soluţie, fie este imposibilă, sau nedeterminată. Dacă cei patru

coeficienţi ai necunoscutelor sînt nuli, sistemul este — evident — imposibil, cu excepţia cazului de nedeterminare completă *c* = c' = 0.

Sistemul are o interpretare simplă: rezolvarea lui înseamnă căutarea punctelor comune a două drepte din plan, date prin ecuaţiile lor, drepte care, dacă ele există, sînt fie secante, fie paralele sau confundate.

Existenţa unei soluţii unice se exprimă prin S = *ab' — ba' =/=* 0. Tot astfel, pentru 3 ecuaţii cu 3 necunoscute, condiţia este

A = *ab'c" + bc'a' + ca'b" — ac'b'' — ba'c" — cb'a" =ţ=*

0. Numerele 3 şi A se numesc *determinanţii* coeficienţilor.

Tot astfel, un sistem de *p* ecuaţii afine cu *p* necunoscute se reduce, prin eliminări succesive, la o ecuaţie sau la un sistem de ecuaţii liniare cu o singură necunoscută. Studiul fiecărui exemplu în parte se face fără dificultate; nu abordăm aici cazul general şi discuţia lui, care cer cunoştinţe de teoria determinanţilor.

4) SISTEM SIMETRIC

$$| X + y = s \text{ I } {}^{x}y = p.$$

O soluţie — dacă ea există — este constituită de perechea de soluţii ale ecuaţiei u^2 — *su* + *p* = 0. Dacă această ecuaţie are două rădăcini, *u'* şi *u",* sistemul admite două soluţii:

$$\begin{array}{ll} 1\ x = u' & | y = u'' \\ | x = u'' & | y = u' \end{array}$$

Dacă această ecuaţie nu are decît o rădăcină u_0 — ceea ce se întîmplă cînd discriminantul este nul — sistemul are o singură soluţie *x* = *y* = u_0. în fine, dacă ecuaţia nu are rădăcini, sistemul este imposibil.

Să reţinem că există o corespondenţă biunivocă între perechea

$$\{x, y\},\ x \hat{} y$$

şi perechea

$$K\ Pb\ s^2 > 4p.$$

B) Ecuaţii care se reduc la cele precedente prin schimbarea necunoscutei.

1) PRINCIPALELE NECUNOSCUTE AUXILIARE CARE POT FI INTRODUSE:

***u = x* — a, pentru a face să dispară anumiţi termeni, de exemplu termenul de gradul întîi în ecuaţia de gradul al doilea.**

u = x²,* într-o ecuaţie în care *x* nu intervine decît prin puteri pare *(ecuaţii bipătrate).

u = x + 1/x **poate fi introdusă în polinoamele ai căror termeni echidistanţi de extremi au coeficienţi egali** ***(ecuaţii reciproce),*** **fiindcă se calculează, pentru valorile succesive ale lui** ***n,*** **expresia** $x^n + (1/x)^n$ **în funcţie de puterile lui** ***u.***

In fine, am indicat deja introducerea unghiurilor auxiliare pentru transformarea expresiilor, folosind trigonometria.

O formulă trigonometrică sau algebrică iraţională nu permite decît calcule numerice aproximative: dacă scopul analizei este determinarea unor asemenea valori aproximative, poate fi inutil să se caute formule exacte (vezi Cartea a IlI-a, Analiza); dar problema pe care o tratăm aici este următoarea:

Fiind dat un sistem de ecuaţii (sau o singură ecuaţie) ai căror coeficienţi sînt litere independente, se cere să se găsească toate soluţiile sub formă de expresii care cuprind aceşti coeficienţi precum şi, eventual, numere cunoscute.

Spunem atunci că ecuaţiile de rezolvat sînt cele ***generale*** **de tipul considerat; literele care figurează în ele, altele decît necunoscutele, se numesc** ***parametri.*** **Rezolvarea se numeşte** ***algebrică*** **dacă expresiile obţinute sînt ele însele algebrice. Am rezolvat deja ecuaţiile de gradul 1 şi 2 cu o necunoscută.**

2) STUDIUL ECUAŢIEI DE GRADUL TREI $ax^3+6a:^2+ca;$ **+d=0.**

a) Rezolvare algebrică. **Introducerea necunoscutei auxiliare** ***X = = x b/3a*** **face să dispară termenul de gradul al doilea şi conduce la**

$$X^3 + pX + g = 0.$$

Să introducem în continuare două necunoscute auxiliare ***u*** **şi** ***v*** **prin** ***X = u + v,*** **ţinînd în rezervă posibilitatea de a mai alege o condiţie care leagă pe** ***u*** **şi** ***v.*** **Făcînd înlocuirea obţinem**

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$$

de unde ideea de a pune

$$3up + p — 0.$$

în final, sistemul care trebuie rezolvat este

$$\begin{cases} X = u + v \\ uv = -\dfrac{p}{3} \\ u^3 + p^3 = -q \end{cases} \text{ echivalent cu (II) } \begin{cases} X = u + v \\ u^3 v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \\ u^3 + p^3 = -q. \end{cases}$$

Ultimele două ecuaţii exprimă că (u^3, v^3) este o pereche de rădă cini ale ecuaţiei $Z^2 + qZ —$ = 0.

Obţinem deci, în cazul

$$\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} \geqslant 0; \qquad X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}}$$

(Formula lui Cartan şi Tartaglia.)

Dacă A este negativ, metoda nu dă nici o soluţie.

Dar este oare sigur că soluţia este unică — dacă am găsit-o în felul acesta, şi că ea nu există — dacă n-am găsit-o? Nu, fiindcă metoda nu poate da decît soluţiile care verifică X^2 ,

condiţie impusă de existenţa lui *u* şi p. De altfel, ea dă toate soluţiile care satisfac această condiţie-

b) Soluţia trigonometrică. **Să introducem necunoscuta auxiliară 9 prin X = X cos 9, X 0, 0 9 <** K, **rezervîndu-ne dreptul de a alege mai tîrziu pe X.**

Ecuaţia devine (remarcînd că X = 0 nu este soluţie decît în cazul neinteresant q = 0),

$$\lambda^3 \left(\cos^3 \varphi + \frac{p}{\lambda^2} \cos \varphi \right) + q = 0.$$

Comparînd cu identitatea 4 $\cos^3$ <p — 3 cos 9 = cos 3 <p, sîntem conduşi să punem X^2 = — —, şi sistemul obţinut este

$$X = \text{X cos}$$
$$\lambda^2 = -\frac{4p}{3}$$

$$X^3 \cos 3 <p = — 4g,$$

adică

$$X = 2 \text{ y—cos } <p$$

$$\cos 3 <p \frac{3/3 \text{ ?}}{2(-p)}$$

$$0 < 9 < re$$

în cazul $p < 0$, $27\ g^2/(—ip^3) < 1$ găsim trei valori pentru cos 3 <p, de unde trei valori pentru cos <p, deci trei valori pentru *X.*

Or, condiţiile pentru existenţa celor trei soluţii pot fi exprimate printr-o condiţie unică

$$A = q^3 + \frac{}{27} < 0$$

care acoperă tocmai cazul în care prima metodă nu dădea nimic.

Să notăm însă că n-am obţinut o formulă care dă toate rădăcinile, sau măcar una din ele, printr-o expresie algebrică în *p* şi *q-,* prin urmare, problema nu poate fi considerată rezolvată, din punct de vedere algebric.

3) ECUAŢIA DE GRADUL PATRU a? + $bx^3 + cx^3 + dx + e — 0$.

Se verifică uşor: 1) că se suprimă termenul de gradul 3 prin schimbarea de necunoscută $X = xb/ia;$ 2) că introducînd o nouă necunoscută *y* prin $x = ky + h,$ pot fi scrise condiţii pentru ca ecuaţia în *y* să fie reciprocă (prin urmare, rezolvabilă prin ecuaţii de gradul 2) şi că atunci, după eliminarea lui *k,* ecuaţia în *h* nu este decît de gradul 3.

în felul acesta ecuaţia de gradul 4 este redusă la ecuaţii succesive de gradul 2 şi 3.

încheiem insistînd asupra faptului că n-am rezolvat complet problema pentru gradul 3 şi 4, iar în ceea ce priveşte rezolvarea problemei generale, că n-am făcut nici măcar un prim pas. Ceva mai tîrziu, vom face o asemenea tentativă, dar putem mărturisi încă de pe acum că nu vom reuşi decît să lămurim un pic problema, fără s-o rezolvăm. Şi nu fără motiv! Tînărul norvegian ABEL (1803—1829) a demonstrat la 19 ani imposibilitatea de a rezolva prin radicali ecuaţia de gradul 5, iar GALOIS (1811—1832), prin geniala sa teorie a grupurilor, a demonstrat că problema este imposibilă pentru ecuaţia generală de grad *n* mai mare decît 4.

CARTEA A TREIA

ANALIZĂ

Fundamentele studiului local şi global al funcţiilor numerice au fost expuse în Cartea I, cap. 4. Aici nu vom face decît să amintim enunţurile esenţiale, înainte de a arăta consecinţele lor şi de a aplica aceste noţiuni la cîteva funcţii particulare.

CAPITOLUL 1

STUDIUL GLOBAL DIRECT AL FUNCŢIILOR NUMERICE

I. Recapitularea definiţiilor

Fiind dată o mulţime de definiţie X C fl, o funcţie numerică *f* asociază fiecărui element a;o imagine în *R.* Cînd *x,* elementul generic al lui *X,* parcurge această mulţime, *y* generează o submulţime *Y = f(X)* a lui *R*

$$Vx \hat{} X,\ x_x\ ^{1}\ yy = f(x).$$

(Din considerente tipografice, în cărţi găsim şi notaţia *f : x->y* care însă nu permite construirea de scheme.) Funcţia *f* este *surjec- tivă* atunci cînd *Y = R.* Funcţia este *injectivă* în *R* dacă fiecare element al lui *Y* este imaginea numai a unui singur element al lui *X,* altfel spus, dacă *f* este *bijectivă* pe *Y.* Atunci/" are asociată o *funcţie reciprocă g* definită pe *Y,* care ia valori pe *X.* Altfel spus, *imaginea reciprocă* a fiecărui *y* prin *f* se reduce la un singur element.

Scriem $g = f^{-1}$ sau $g = f.$

O funcţie care respectă relaţia de ordine naturală în *R* se numeşte *funcţie crescătoare-,* dacă funcţia inversează această relaţie de ordine, ea este *descrescătoare.* Studiul creşterii unei funcţii cere, în general, o *partiţie* a lui *X* în submulţimi în care funcţia este monotonă. Concluziile acestui studiu se consemnează în *tabelul de variaţie* care pregăteşte

trasarea graficului.

Mai toate funcţiile pe care le considerăm sînt definite pe o reuniune de *intervale* ale lui *R,* unele intervale putînd însă să se reducă la puncte izolate. Totuşi, schimbînd la nevoie cîteva cuvinte, conţinutul acestui capitol este valabil şi pentru *şiruri,* adică pentru funcţiile definite pe mulţimea *N* a întregilor naturali sau pe mulţimea *Z* a întregilor relativi.

Exemple:

Vn G *N,* _____ ^*y* = 1 • 2 • 3 ... n = n ! (funcţia factorial)

Vm G *Z,* _____*y,y* = *aq*^{m} (termenii unei progresii geometrice)

II. Legea de compoziţie în mulţimea funcţiilor

Schema fundamentală permite definirea produsului *f* = *g* X *h.*

_____
f

Imaginile succesive ale lui *x* sînt

w = g(*), *y* = *h{u) = h[g{x)],*

ceea ce justifică notaţia *f* = *h* o g, singurul exemplu în care o operaţie este notată de la dreapta la stînga. Folosind schemele, este mai comod să păstrăm notaţia de produs.

a)* Determinarea mulţimii de definiţie. Fie *X* mulţimea de definiţie a lui g şi *U* cea a lui *h.* Mulţimea de definiţie a lui *f* este cea mai mare submulţime X_x a lui *X* care verifică *g*(X_x) C *U;* aceasta înseamnă că este tocmai mulţimea imaginilor reciproce prin g ale elementelor lui *U.

EXEMPLU

$$x\_\_\_\_\_,u = \quad = |A$$

I - 1 J

§*X* =]—00, —1] U]— 1, +oo[, *U* = [0, +00]

x G ***u* 0**

2) ***Creşterea.*** **Aşa cum rezultă din însăşi definiţia produsului de compoziţie, dacă fiecare din componente este crescătoare sau descrescătoare cînd *x* parcurge o submulţime X_o Q X_v funcţia produs este crescătoare sau descrescătoare după cum numărul de funcţii componente descrescătoare este par sau impar.**

CAZUL PARTICULAR AL FUNCŢIILOR RECIPROCE

O funcţie bijectivă *f* este monotonă; atunci şi funcţia *g* este monotonă, şi cele două funcţii sînt sau ambele crescătoare, sau ambele descrescătoare.

^{x}|_L_sy|_?_s^{x}

c) **Aplicaţii la întocmirea tabelului de variaţie**

Pentru a simplifica întocmirea şi citirea tabelului, în loc de a indica creşterea funcţiilor componente (săgeţi verticale în tabelul 1), marcăm creşterea produselor *g* X *h, g* X *h* X *j* chiar pe rîndul rezervat imaginilor (săgeţi oblice în tabelul 1) aşa că, deoarece *x creşte* de la stînga la dreapta, săgeţile arată dacă valorile cresc sau *scad* de la stînga la dreapta.

EXEMPLU

o şX =a;\ „u = X — 9$_X$ ⌋ = w^2

***x* - 0-—i**

$^{X =}$ ~^{3} | <----------X = 9 <-------u= 0—

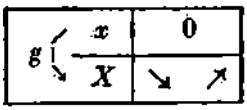
***x* = + 3]**

TABELUL 1

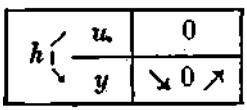
***X$_x$* =]-oo, -1[U {0} U [+1, +oo[.**

b) **Proprietăţile produsului de compoziţie**

** **Această lege de compoziţie este, evident, *asociativă* şi, în general, *necomutatioă.* Numai în cazul în care toate componentele sînt bijective, ea conferă mulţimii funcţiilor o structură de grup, prin existenţa funcţiilor inverse (reciproce).**



g	x	0
	X	↘ ↗



h	u	0
	y	↘ 0 ↗

	x	↗	−3	↗	0	↗	+3	↗
g		↓		↓		↑		↑
	X	↘	9	↘	0	↗	9	↗
h		↑		↑		↑		↑
	u	↘	0	↘	−9	↗	0	↗
j		↑		↓		↓		↑
	y	↘	0	↗	81	↘	0	↗

TABELUL UZUAL	***X***	*7*	-3	7	0	7	+3	7
	X		9		0	7	9	7
	u		0		-9	7	0	7
	y		0	7	81		0	7

III. Funcţiile fundamentale

Cele de mai sus ne permit să studiem funcţii complexe plecînd de la funcţii fundamentale studiate direct:

$y = (z^2 - 9)^2$

1) ***Funcţia constantă*** **de valoare** ***k*** **... Vo: G** ***R, X| = k***

2) ***Funcţia identică*** ***...Yx*** **G** ***R,*** $^x|$ ^{s} ***FU = x***

3) ***Funcţia translaţie*** ***... Yx*** **G** ***R,*** x_K **S** ***^y = x-ţ-a,***

funcţie care este crescătoare, fiindcă Yx_r, Yx_2, y_2 **—** ^{x}***Hi*** $= {}^x$***z —*** ^{x}***i.***

4) Funcţie liniară ***k =/= 0 ... Yx*** **G** ***R,*** $^x|$ ^{1} ***F! = kx***

$y_2 - y_v = k\{x_2 - x_x\}$**, deci** $k > 0$ **£/,** $k < 0$ **£**

PROPRIETATE. ***Orice funcţie liniară respectă adunarea:***

$$Y^{x}i,\ Vx_2,\quad a?!\ -I^{-\,a;}2\_zl/3\ ^{=}\ J/i\ H^{-}\ Ut'$$

Această proprietate este caracteristică. într-adevăr, fie o funcţie *f* care verifică

$$V^{\wedge},\ YX_2,\ f(_{X1}\ +\ x_2)\ =\ f(xj)\ +\ f(x_2).$$

Elementului neutru 0 al adunării îi corespunde, în mod necesar, /•(O) = 0. Să notăm atunci *k = /"(!).*

Să construim funcţia prin puncte.

Prin urmare, Va; G *Q, x y = x • k = kx.*

Spre a conchide pentru Va; G *R,* trebuie făcut apel la topologie. Prin însăşi definiţia lui, *r* G *R* este definit printr-o capcană de intervale cuprinse unul în altul, definită în *Q.* Or, lui (a_n, 6_n) îi corespunde *[f(a_n), f(b_n)],* fiindcă funcţia este monotonă, şi inegalitatea |*f(b_n) — f|* ^{a}*n)*| = |Ă| ’ I $b_n - a_n$ | < s este satisfăcută de îndată ce / $b_n - a_n$ / < —— ; prin urmare, *f(r) = k‘ r,* pe

1^’!

baza definiţiei înmulţirii în *R.*

REMARCĂ. Mulţimea funcţiilor liniare formează un grup în raport cu operaţia produs de compoziţie (elementul neutru este dat de *k* = 1, funcţiile inverse sînt date de numerele inverse *k*

5) Funcţia omografică elementară

Vx f=R-* {0},** $_{Xx}$ **x = -** ***X **0 este *valoare interzisă.***

x	7 o 7	
y		

Studiul creşterii funcţiei se face în fiecare din intervalele a căror reuniune este mulţimea de definiţie. în fiecare din ele x_1x_i este pozitiv, prin urmare funcţia este descrescătoare.

PROPRIETATE.*Funcţia respectă birapoartele* (Carteaa IV-a, cap.2), ceea ce justifică numele ei, de origine geometrică.

6) Funcţia putere de exponent n G N. Va: G *R, x* | *S* ş *y= x^n*

yz 2/i = -^2 = (a:$_2$ ^î) [a^> *i x£* ^{2} *Xi* -|- ... -f-

+ a^a;î+ ... + a^^{1}].

Pe R^+, funcţia este crescătoare. Pentru a o studia pe $R\sim$, trebuie precizată paritatea lui *n.* Vom folosi o descompunere a funcţiei.

n par

$$x \underset{x \in R-}{} \qquad u = -x \mid \underset{x \in R+}{z}\ v = u^n \mid {}^{s}\underline{s}\ s\ y = v,$$

deci *f\pe R~;*

n impar

$$x \mid s\ u - - - x \mid j.\ v - u^n\ x\ y = -v,\ X\ R- \quad u£R+$$

deci fZ pe $R\sim$.

PROPRIETATE. *Orice funcţie pu*$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}$ *k exponent întreg transformă sumele în produs'.*

$$Va:_n\ Va:_2,\ \hat{}(x_t + x_z) = S(x_t) \bullet S(x_2),$$

de unde *p G* = [®(a:i)]^p-

7) Alte funcţii fundament$f\left(-\frac{p}{q}\right) = -f\left(\frac{p}{q}\right) = -\frac{p}{q}$ k.ıte sînt date cu ajutorul un ora numerică. Trebuie să mai introducem :

a) ***Funcţiile logaritm şi exponenţială*** **(vezimai departe cap. 5, III).**

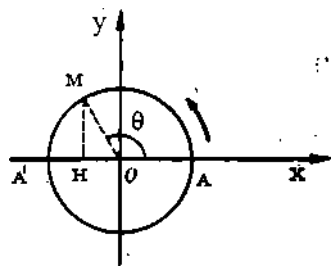
b) ***Funcţia valoare absolută*** **V*x*^*R, x*| *sH* = |o:| definită prin**

Va: £ R^+ $\begin{cases} x = 0 & Vx \in R \sim \\ 0 & x \end{cases}$ *X*|⌋^?/= *x* *y= — x*

c) ***Funcţiile definite cu ajutorul geometriei:*** **funcţiile *sinus* şi *cosinus* legate prin schema de mai jos**

φ = cp + — ^sinus^, $y = \sin \varphi$,
cosinus $y = \cos \varphi$

în cercul trigonometric orientat, de



raza 1, şi presupunînd unghiurile măsurate în radiani,

eeR -'fee' HeA'A X----------*" Y - HM* - sin 6

	—7t		7T/2		0		7T/2		7C
sin 9	0		-1	7	0	7	1	X*	0
cos <p	-1	7	0	7	0		0		-1

Am văzut (Cartea I, cap. 5)că aceste funcţii admit perioada 2TC. **Ele stau la haza formării funcţiilor periodice a căror definiţie o amintim:** ***numărul p este perioada unei funcţii f dacă este cel mai mic număr astfel încît***

$$\forall x,\ f(x + p) = f(x).$$

IV. Funcţii compuse

Compunind funcţiile fundamentale precedente, putem obţine o infinitate de noi funcţii. Le consemnăm pe cele mai simple:

1) Funcţia afină: $ix^R,$ $y = ax + b,$ **0.**

Pe baza identităţii $ax += a$ **Gr + —j, folosim** $x_K \underline{£}$ **y u** $= ax \mid y = u + b$

sau

$X \mid \underline{61}\ v = x +$ A _£_z $y = av$

2) omografic $^x \mid J\_sy = \frac{ax + b}{a'x + b'}$ $a' 0.$

Pe baza identităţii

$$ax + b \quad a \mid \frac{h}{x + \frac{b'}{a'}} \qquad h \quad \frac{ba' - ab'}{a'^2}$$

folosi

	$h > 0$	$h < 0$	$h = 0$
$X \mid \underline{T} >$	$11 = X - f - \frac{i\ b'}{\backslash\ \underline{I}}$	/■/	$+ hv$ $y = \frac{}{a'}$
	$x + -L<$		

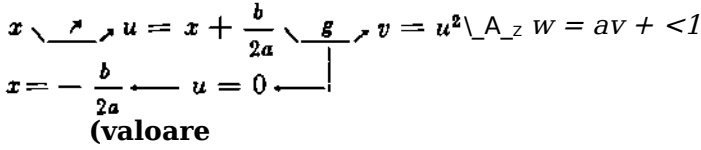
3) Funcţia trinom de gradul doi:

$$x \mid^{s} s\ y = ax^2 + bx + c,\ a =/= 0.$$

Pe baza identităţii $ax^2 + bx$ **-j-** $x + \frac{1}{c}\left[a\right]^{d},\ d =$ b^* **4a**

j a > 0 |a < 0

folosi



(valoare

IM 1 *h* |

Ca exerciţiu, se vor studia funcţiile definite prin *f=gxl*

$a > 0$		
	x	$-\frac{b}{2a}$ 7
	y	***d***

$a < 0$		
	x	-■*h'*
	y	***d***

***x* | *g j, u = g(x)* |⁸ >■ *y = au*² + *bu* + c**

cînd *g* este o funcţie cunoscută, de exemplu *g(x) = x*² *(f* este *funcţie bipătrată).*

4) Funcţia putere (exponent m G *Q).* Mulţimea de definiţie este în cazul de faţă *R*| Ştim că, în acest caz, pentru orice întreg n, funcţia x \ ˢ *s y = x*ⁿ este crescătoare.

Introducerea exponenţilor întregi negativi. Notăm (—) = x-* şi *f y = x~*ⁿ este definit prin

$$\forall x \in \mathbf{R}^{+},\ x \setminus \underline{X} >,\ u = \frac{1}{x} \mid^{2} y = u^{n},$$ **deci *f* | .**

Afirmaţia este justificată pentru că avem, în plus *f(x^'* xj = = /Mi)

Introducerea exponenţilor fracţionări. Deoarece funcţia S este crescătoare, ea admite o funcţie reciprocă definită pe *Y = ţt(Rţ).* Faptul că y = *R*⁺ a fost justificat de noi cînd am studiat mulţimea numerelor reale (Cartea a Il-a, Partea I, cap.3, § 2), ceea ce ne

permite să generalizăm structura

$$x \mid {}^{2}\underline{n}\ y \text{ “ } x^{n} \qquad\qquad y^{n}\ x^{WTl}$$

la situaţia

$$x \setminus \_Ş2\__Z \; y = x^n \qquad z = x = x^1$$

luînd $n' = \frac{}{n}$ **. Prin urmare, funcţia inversă lui**

$$x \mid y = x^n \text{ este } u \mid \underline{\qquad\qquad}_z \; v = u^n \; .$$

în felul acesta se defineşte funcţia $x \mid = xfl$ **pentru** $qf=Q.$ **_2**

Exemplu: $x \mid \underline{f} \; s \; y = x \; V$ **este definită prin**

V® G $R^+ > {}^x$ **_^_z w =** $\frac{!\ 1}{}$ $\setminus \_^* s \; o = u^3 \; {}_x{}^z$ **2-V** $- P^4$ **, prin ur-** x **mare** f **|.**

Noi nu vom folosi exponenţi neraţionali.

V. Introducerea unei structuri de corp în mulţimea funcţiilor

Cele două scheme alăturate definesc două funcţii, q> şi <p, care dau respectiv imaginea sumă şi imaginea produs ale imaginilor date de g **şi A. Este vorba de două operaţii în mulţimea funcţii lor, pe care este firesc să le numim** ***sumă*** **şi**

N___!_/
<p(a:) = $g(x)$ **+**
$h(x)$

$x^7{}_h$ **'bM lz=U-V**
\\-4- zv h
_i_____/

$$<P = g + h, = g - h.$$

<K®) = $g(^x) \bullet$ **(A nu se confunda cu produsul** ***produs*** **de funcţii şi de compoziţie. Dacă va exista să le notăm**

confuzie, vom spune „funcţie compusă" şi vom folosi notaţia $F = h$ **o** g **sau** $F(x)$ **= Ă[g(a;)].)**

STRUCTURA ADITIVĂ. Elementul neutru u: fu$_n$cţia constantă cu valoarea 0.

Elementul simetric lui *g* este funcţia *x | g s u \ (—1) şP = — u.* Prin urmare — grup aditiv comutativ.

STRUCTURA MULTIPLICATIVĂ. Elementul neutru p.: funcţia cu valoarea constantă egală cu 1. Elementul simetric lui g, diferit de 0, este funcţia a: \ g >. u _v — $\frac{1}{u}$ • Prin urmare — grup multiplicativ comutativ, dacă se exclude funcţia u.

DISTRIBUTIVITATEA. Rezultă din identitatea numerică

$$[g(*) + h(x)] \blacksquare f(x) = g(x) \blacksquare f(x) + h(x) \bullet f(x).$$

(Lăsăm pe seama cititorului să facă schemele).

Există *deci structură de corp comutativ.* Va fi interesant de văzut care proprietăţi sînt respectate de această structură (vom stabili continuitatea, derivabilitatea). în ceea ce priveşte creşterea, nu indicăm decît două enunţuri foarte particulare:

Teorema 1. *Funcţia sumă a două funcţii crescătoare [sau descrescătoare) este crescătoare (sau descrescătoare).*

Teorema 2. *Funcţia produs de două funcţii cu* valori pozitive *crescătoare (sau descrescătoare) este crescătoare (sau descrescătoare).*

Aceasta rezultă din identitatea numerică:

$$g\{x_2)h(x_2) — g(x_l)h(x_l) = [g(x_2) — g(x_t)] \bullet h(x_2) +$$

$$+g(*i) \bullet \hat{}(s,) - h(x_t)].$$

Concluzie. Cu toată importanţa rezultatelor obţinute, studiul de mai sus nu reuşeşte totuşi să cuprindă o serie de funcţii foarte simple, de exemplu *x | s y = x^3 — x,* pe care nu ştim s-o studiem decît pe *R~.* Procedeele mult mai puternice ale analizei ne vor permite să

eliminăm această deficienţă.

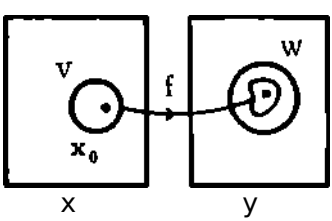
CAPITOLUL 2

STUDIUL LOCAL AL FUNCŢIILOR

I. Recapitularea definiţiilor

Noţiunile de continuitate, limită, derivată au fost introduse în Cartea I, cap. 4 , Partea a II-a; amintim totuşi definiţia lor generală, înainte de a le folosi în cazul funcţiilor numerice.

0 funcţie *f* aplică o mulţime *X* într-o mulţime Y; se presupune că în fiecare din cele două mulţimi a fost definită o topologie, adică o mulţime de vecinătăţi.



a) **Continuitate. în a>$_0$, funcţia este definită= !/o-Funcţia *f* este continuă în x_0 dacă, oricare ar fi vecinătatea W(t/$_0$) c Y, există o vecinătate V(#$_o$) cXa cărei imagine este inclusă în W(y_0).**

$$VWfo), Wo): f[V(x_0)] C W(y_0)$$

Limită. în x_0 funcţia poate să nu fie definită, dar ea este definită pe o vecinătate „găurită" V(x_0) — Dacă există un element X astfel încît, dacă punem /'(a^) — X, funcţia

devine continuă în x_{01} spunem că X *este limita lui f în x_0.* Spunem de asemenea că *„f(x)* tinde către X cînd *x* tinde către z_0“. Scriem: lim *f = X* sau lim *f(x) =* X sau *f(x)* -> X.

X—*Xo X—*X(J X-*Xo

b) **Derivate* Noţiunea de derivată apare de îndată ce au fost definite măsuri pentru submulţimile W şi *V.* Derivata, *dacă* există, este limita raportului**

$$\frac{\text{măS f[F(T<>)]}}{\text{măs V}(x_0)} \text{ cînd măs V}(x_0) \text{ -> 0;}$$

(de exemplu, dacă *X* este mulţimea volumelor şi *Y* cea a maselor, derivata în se numeşte *densitatea* în acel punct).

c) **Cazul funcţiilor numerice, adică al funcţiilor definite pe *R* şi luînd valori în *R.* Vecinătăţile folosite sînt intervale centrate în punctul considerat, prin urmare mulţimi definite prin | *x*—x_0| < < I *y — yo* I < Ş etc. în tot acest studiu, vom folosi notaţiile / *x* — x_0 | = Aa;, | *y — y_0* / = Ay etc. Astfel, continuitatea în *x_0* va fi definită prin**

$$\text{Vs} > 0, \exists a: |\Delta a;| < a \text{ -=>} |\Delta y| < e$$

iar derivata va fi — dacă există — *y'$_o$* = lim —.

Ax-9 Ax

(Vom nota că măsurile care intervin aici sînt orientate.)

Dacă funcţia este derivabilă în orice punct $a;_0$ al unui interval, mulţimea valorilor *y'$_Q$* defineşte o *funcţie derivată y' = f'(x).*

d) **Cazul unei funcţii vectoriale *x R $_x$*V(a;) G :**

Pa baza structurii de spaţiu vectorial (Cartea I, cap.3), putem scrie AV = V — V_o şi U = AV.

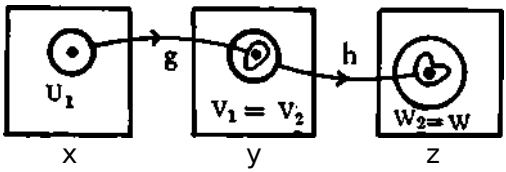
Dacă acest vector U are o limită cînd Aa; tinde către 0, acel vector limită este derivata V^a funcţiei vectoriale. In acest caz, cînd *x_0* variază, este definită funcţia vectorială derivată *x |$_z$ N'(x).*

II. Continuitate şi limită

1) Studiul local al legii de compoziţie *f - g* X *h* (adică *f = = hog'). Se presupune că funcţia *g* este continuă în rr$_0$, iar *h* în *y$_0$* = g(a:$_0$). Deoarece vecinătăţile sînt ordonate prin incluziune, imaginile lor sînt ordonate şi ele în acelaşi mod, ceea ce ne permite următorul raţionament:

Ipoteza 1, W^yo), 3^(^o) : g(^i) C V_n

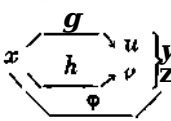
Ipoteza 2, $VW_2(z_0), 3V_2(y_0)$: *h(V₂)* C *W_2.*

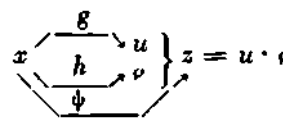


Prin urmare, odată ales $W(z_0)$, pentru a asigura apartenenţa zglV, este suficient să alegem *W_2 = W,* din ea să deducem V_x, apoi să alegem V_x = *V_2* şi să deducem din ea $C/_x$. Atunci =s>*ZEW,* ceea ce demonstrează continuitatea.

Limită. **Dacă funcţia g nu este definită în *x_0* dar admite o limită X în acest punct, această limită joacă rolul lui y_0 din cele de mai sus, şi *f* admite limita /i(X) în *x_0.* Tot astfel, dacă *h* nu este ea însăşi definită în *y* = X, dar admite în acest punct o limită p, funcţia admite limita p în x_0.**

2) Studiu local în corpul funcţiilor numerice.





Continuitate. Presupunem cele două funcţii g şi *h* continue în i_0, prin urmare

V e_x > 0, 3«! : | Arr | < «! => | Au | < e_x

Ve_2 > 0, 3a_2 : | Aa; | < a_2 ==> | Ap | < e_2

a) ***Suma:*** **Ay = Au +** Ap.

e fiind ales, pentru a asigura inegalitatea | Ay | < e, este suficient să asigurăm inegalitatea

$$|Au| + |Ap| < e.$$

Vom lua e_x = $E_2 = \frac{1}{2}$ **e de unde deducem pe a_x şi a_a; fie a cel mai mic dintre numerele a_x şi a_2, ceea ce se notează a = inf(04, a_2). Atunci**

| A* | < oc | A y | < e.

b) Produsul: **Az= (u₀-\|-Au)(p₀-j-**AP) — U_0P_0= **p₀Au4-(u₀+Au)Ap ; prin urmare:**

$$| Az | < | P_0 I \bullet I Au | + | u_0 4- Au | \bullet | Ap |$$

e fiind ales, pentru a asigura | Az | < e, luăm

$$\frac{e}{2 I Po} \qquad \frac{£}{2(I | 4- ej}$$

De aici deducem a_x şi a_2; este suficient după aceea să luăm a = inf(aj, og).

Cele de mai sus presupun u_e =£0, p_0 =/= 0, dar studiul este analog dacă u_0 sau p_0 sau ambele aceste numere sînt nule.

CONCLUZIE. ***Suma şi produsul a două funcţii continue sînt continue.*** **Afirmaţia se generalizează din aproape în aproape la un număr oarecare de funcţii.**

Limită. Dacă *g* sau *h* sau ambele aceste funcţii nu sînt definite în x_0 dar admit, în acest punct, limitele X şi respectiv p, este suficient să înlocuim în cele de mai sus pe u_0 şi P_0 **cu X şi p.**

Suma şi produsul funcţiilor care au limite au şi ele limite egale respectiv cu suma şi cu produsul acelor limite.

c)Cîtul. **Vom avea nevoie să cunoaştem rezultatele referitoare la *x „ F t = — .* Este însă suficient să studiem *x . f* , u = — ,**

\|*u* **_*L_s*$^J{}_x$**

fiindcă *F* se descompune sub forma *x u f w* = —

X—' \ u

Or:

$$\dot{A}y = \frac{1}{x_t + Ax\ x_a\ (x_0 + Ai)\,l_0} \cdot \frac{1}{} \cdot \frac{1}{} \cdot \frac{— Ai}{}.$$

x₀ =f= **0 ne permite să limităm studiul la | Aa; | < —. | a;₀|, de unde**

$$\frac{I Ax}{\frac{3}{2} | x_0 |^2} \qquad < I Ay | < \qquad \frac{I Ax}{\frac{1}{2} | x_0}$$

Prin urmare, inegalitatea | Ai/ | < e este asigurată de inegali- tatea | Aa; | < — | x_0 |^2, ceea ce demonstrează continuitatea lui *f,* şi deci şi a lui *F,* dacă *u* este continuă. Tot astfel, dacă *u* nu

este definit în x_0 dar admite limita X, $F(x)$ admite în x_0 limita cu condiţia ca X 0.

CONCLUZIE: ***Citul a două funcţii care admit limite în x_0 admite o limită egală cu citul limitelor.***

III. Derivata

Reluăm notaţiile din paginile precedente.

1) Derivata unei funcţii compuse *f - g* X *h* (adică *f = h* o g). Am notat

$$\bar{r}\,\tilde{\imath} = \frac{\text{măsgfU,)}}{\text{măs } U_1} \text{ şi } r\,2 = \frac{\text{măsfclKj)}}{\text{măs } V_2}$$

Presupunem *g* şi derivabile:

$$h\text{fi} = go \text{ ŞÎ } !\text{im } r_2 - h\hat{}.$$

$$\text{măs Ui}\sim>0 \quad \text{măs V»-.O}$$

Or, definiţia limitelor ne permite să alegem drept vecinătate V_2 vecinătatea g(t/₁), fiindcă măsura ei tinde către zero odată cu cea a lui [7₁, aşa cum rezultă din continuitatea lui *g.*

Atunci:

Pe baza teoremei referitoare la limita unui produs de funcţii, cînd măs *Ui* tinde către 0, r admite o limită egală cu *g'ₒ-h'ₒ. Prin urmare, funcţia F = g* X *h admite în x_0 o derivată egală cu produsul derivatelor funcţiilor g şi h.*

Dacă este vorba de funcţii numerice *x g y* K h z, scriem funcţiile derivate sub forma z' = z'_y • y'_x, unde indicii specifică variabila în raport cu care se face derivarea. Trebuie reţinut că z'_y este exprimată cu ajutorul lui *y,* aşa că formula completă este

$$Zx(*) = z;[y(®)] \bullet y\hat{}^{x)} \text{ sau } £(«) = \quad \bullet g*(^{x})\text{-}$$

DERIVATA FUNCŢIEI RECIPROCE A UNEI FUNCŢII

NUMERICE

BIJECTIVE.

s *f* z *y*^{x}

***x*$_0$ fiind ales, *f*(*x*$_0$) = *y*$_a$. Cele două creşteri As şi Ay sînt şi ele asociate prin corespon-**

denţă biunivocă. Dacă, prin ipoteză, $r_1 = \frac{}{}$ admite limita f_3 Ax cînd Aa: tinde către 0, $r_2 = \frac{}{} = \frac{}{}$ admite limita —. *Funcţia* Ay fo *reciprocă a lui f admite deci o derivată egală cu inversa derivatei luif:*

2) Formulele de derivare în corpul funcţiilor numerice. Presupunem că *x f* şi $^{X}|S$ s*nt derivabile în x_0. Fie:

«) x <p y = u -J- p, Ay = Au + Ap, **deci 4- ,**

$^{x}Ax\ \&x\ \&x$ **adică dacă**

$r_1 = \frac{}{\Delta x}$, $r_2 = \frac{}{\Delta x}$, * *corespunzători zerourilor complex conjugate.*

EXEMPLU:

$z^4 + 1 = 0$ are rădăcinile $\frac{1}{/\ 2}$= (± 1 ± i),

prin urmare

$x^4 + 1 = (x^2 + x\ |/\ 2 + 1)\ (x^2 — x\ 1/\ 2 + 1)$.

Numerele complexe n-au servit aici decît drept intermediari pentru a obţine nişte rezultate reale.

1) în trigonometrie, formula lui Moivre

$$(\cos 0 + i \sin 6)^n = \cos n\,6 + i \sin n\,9$$

dă, după dezvoltare şi separarea părţilor reală şi imaginară:

$$\begin{aligned} &I\cos 2\,6 = \cos^2 0 \qquad\qquad - \sin^2 0 \\ {}^{n}\quad &|\ {}_{s}j_{n}\ 2\,6 = \quad 2\sin 6 \cos 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &j\cos 3\,6 = \cos^3 6 \quad - 3\cos 6 \sin^2 6 \\ {}^{U}\quad &|\ {}_{s}j_{n}\ 3\,6 = \quad 3\cos^2 6 \sin 6 \qquad - \sin^3 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &|\cos 4\,6 = \cos^4 6 - 6\cos^2 6 \sin^2 6 \qquad + \sin^4 6 \\ {}^{n}\ &|\sin 4\,6 = 4\cos^3 6 \sin 6 \qquad\quad - 4\cos 6 \sin^3 6 \end{aligned}$$

Şi aşa mai departe. în formulele pentru multiplicarea arcelor apar coeficienţii ai binomului.

2) în geometria metrică plană, un vector este reprezentabil printr-un număr complex. Se poate întîmpla ca operaţiile care trebuie efectuate asupra acestui vector să aibă o interpretare în cadrul calculului cu numere complexe. Tot astfel, în electricitate, după ce am reprezentat o funcţie sinusoidală printr-un vector (reprezentarea Fresnel), metoda introducerii numerelor complexe permite să se trateze problemele de curenţi alternativi prin formule analoage celor pentru curenţii continui.

Am văzut deja că funcţia $Z = \frac{aZ+}{a'z\ b}$ exprimă transformări simple care păstrează unghiurile. Trebuie notat că simetria în raport cu axa luată ca axă reală corespunde aplicaţiei

$$z = x + iy \quad _{xz}\ z = x - iy.$$

Această trecere la numărul complex conjugat schimbă sensul unghiurilor; ea nu se înscrie deci printre funcţiile cărora li se aplică rezultatele de la (III, 3).

EXEMPLU DE APLICAŢIE GEOMETRICĂ. O condiţie necesară şi suficientă ca 4 puncte *A, B, C, D* să fie pe un

cerc este *

Teorema lui Chasles nu putea face să intervină celelalte două laturi *AB* şi *CD* ale dreptunghiului; din ea nu puteam deduce direct

$$(AB, AC) = (DB, DC), \pmod{K} \qquad (2)$$

în ciuda echivalenţei acestor două condiţii.

O interpretare cu ajutorul numerelor complexe ne dă uşor acest rezultat. Să numim *a, b, c, d* numerele ale căror afixe sînt punctele date. Inscriptibilitatea se scrie

$$\arg\frac{d-a}{c-a} = \arg\frac{d-b}{c-b}, \pmod{TZ} \qquad (1)$$

sau, introducînd un biraport (Cartea a IV-a, Partea I,cap.2):

$$\arg\left[\ \right] \text{ ———^1 = 0, (modKl} \qquad (1')$$

***c — a c —* oj**

ceea ce este echivalent cu a spune că

$$A = \frac{d-a}{c-a}:\frac{d-b}{c-b} \text{ este real.} \qquad (I)$$

Vom schimba ordinea în care sînt luate cele 4 numere care formează biraportul cu ajutorul identităţii

$$(b-a)(d-c) + (d-a)(c-b) = (c-a)(d-b) \qquad (<T)$$

Deducem atunci că

$$\frac{b-a}{d-a}:\frac{b-c}{d-c} = 1 - X \text{ este real, } c-a\ d-c$$

ceea ce demonstrează (2).

Să notăm cazul interesant în care unul din aceste birapoarte are. valoarea —1, celelalte avînd valorile 2 sau 1/2; patrulaterul corespunzător se numeşte atunci *armonic-,* el merită să fie studiat ca. exerciţiu.

Pentru a deduce din egalităţile precedente o relaţie în modul, să precizăm că patrulaterul numit *ABCD* este convex. Atunci egalităţile, aşa cum au fost ele scrise,

sînt exacte mod 2TC. **Or, egalitatea**

$$\arg (d - a)(c - b) = \arg (c - a)(d - b), \pmod{2K}$$

exprimă că vectorii reprezentaţi prin numerele complexe

$$(d - a)(c - b) \text{ şi } (c - a)(d - b)$$

sînt paraleli de acelaşi sens, şi la fel pentru (6 — a**) (d — c). Identitatea dă, deci, în module**

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot DB$$ ***(formula lui Ptolemeu)***

Pe baza inegalităţii triunghiului, dacă patrulaterul convex nu este inscriptibil, avem

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC > AC \cdot DB.$$

în geometria analitică, cu două sau cu trei dimensiuni, sîn- tem conduşi să acceptăm pentru coordonate valori complexe. Punctele corespunzătoare sînt atunci *puncte imaginare*: de exemplu, în plan, un cerc şi o dreaptă de ecuaţii

$$x^2 + y^2 - R^2 \text{ şi } y = mx + p$$

se vor tăia — dacă nu sînt tangente — în două puncte care vor fi reale sau imaginare după cum ecuaţia pentru abscisele intersecţiilor

$$(1 + m^2)x^2 + 2mpx + p^2 - R^2 = 0$$

are rădăcini reale sau complexe.

Sîntem conduşi, de asemenea, să introducem *curbe imaginare,* în particular, cercuri cu centru real dar cu raza pur imaginară: atunci, de exemplu, orice fascicul de cercuri are două puncte de bază şi două puncte limită.

Păstrăm definiţia distanţei între două puncte: în plan, $OM^2 = x^2 + y^2$**, însă două puncte distincte pot fi la o distanţă nulă, de exemplu punctul de coordonate** $x = a$**,** $y =$ **ia este la o distanţă nulă faţă de origine fiindcă** $x^2 + y^2 = 0$**.**

Asemenea rezultate cu aspect oarecum paradoxal

arată că trebuie oarecare precauţie în utilizarea acestei metode datorate în principal lui Poncelet. însă teoria curbelor algebrice nu se poate lipsi de ea.

CARTEA A PATRA

GEOMETRIILE

0 geometrie studiază o mulţime de elemente numite puncte şi anumite submulţimi ale acesteia: drepte, plane, în general — figuri. între diversele elemente se introduc operaţii; ele permit să se definească aplicaţii ale unei submulţimi pe o alta (de exemplu, transformări punctuale). Aceasta înseamnă că geometria apare ca fiind un *model al unei algebre* căreia trebuie să i se adauge o *topologie* care introduce noţiunea de continuitate. Aşadar, dacă considerăm ştiinţa despre spaţiu drept o ştiinţă algebrizată, n-o facem numai pentru că geometria poate fi redusă la calcul numeric (la geometrie analitică).

Totuşi, după ce au fost adunate la un loc proprietăţile anumitor figuri fundamentale şi cele ale anumitor aplicaţii ale spaţiului pe el însuşi, devine posibil să se facă raţionamente sintetice sprijinite pe intuiţia spaţiului *fizic,* şi să se revină la atitudinea mintală proprie geometriei tradiţionale a lui Euclid. De altfel, exact aceleaşi raţionamente, dar folosite plecîndde la alte fundamente axiomatice, conduc la construirea unor geometrii distincte; în cele ce urmează, noi le vom introduce numai pe cele care sînt

foarte apropiate de geometria euclidiană.

Raţionamentele de tipul numit „geometric[11] pot fi caracterizate în modul următor: obiectul unui studiu geometric este o situaţie prea cuprinzătoare pentru a putea să i se expliciteze toate proprietăţile care constituie ipotezele. în fiecare moment, trebuie alese acele proprietăţi care oferă combinaţii despre care se ştie deja din experienţă că conduc la concluzii cunoscute şi utile. în locul simbolismului unui sistem de ecuaţii care trebuie transformate, se folosesc scheme mai mult sau mai puţin complexe în care fiecare inferenţă presupune numeroase operaţii algebrice făcute o dată pentru totdeauna, în cadrul teoriei. Fiecare din aceste inferenţe se numeşte *o teoremă;* ea este, într-un anumit fel, un bloc de piatră cioplit dinainte, gata să servească la construirea unui edificiu. Dar ceea ce interesează realmente sînt asamblajele acestor blocuri: geometria foloseşte teoreme pentru a studia *probleme geometrice.* Din acestea se extrag teoreme mai complexe decît primele, care conduc la noi probleme; în felul acesta geometria se îmbogăţeşte la infinit şi se desfăşoară într-o ştiinţă autonomă a cărei frumuseţe este bine cunoscută.

REMARCĂ. Figurile desenate efectiv nu sînt indispensabile decît pentru anumite cazuri particulare care trebuie observate cu ochii. Noi însă, cel mai adesea, nu vom studia decît submulţimi foarte generale înzestrate cu structuri simple, ceea ce explică absenţa desenelor. Foarte adesea însă cititorul va fi totuşi interesat să schiţeze unele figuri, pentru a urmări mai uşor notaţiile.

PARTEA I

GEOMETRIE AFINĂ ŞI GEOMETRIE PROIECTIVĂ

CAPITOLUL 1

GEOMETRIE AFINĂ

Am introdus, în cap. 3 al Cărţii I, pe de o parte — spaţiul vectorial cu un număr oarecare de dimensiuni, pe de altă parte — imaginea lui punctuală (pe care o numim acum ,,spaţiu“) care este determinată cînd_ se dă punctul origine *0* şi baza {u, v, w} a spaţiului vectorial. In geometria plană, *reperul* va fi notat de exemplu *0*; (u, v}. în geometria în spaţiu (subînţeles cu trei dimensiuni), reperul va fi *0*; {u, v, w}.

în geometria afină nu introducem pe spaţiul vectorial decît cele două operaţii care îi caracterizează structura: adunarea şi înmulţirea cu un număr pe care îl presupunem totdeauna real (geometrie afină reală).

§ 1. FIGURILE FUNDAMENTALE

I. Geometrie plană (două dimensiuni)

Reperul *0;* {u, v} este presupus dat. Am văzut că un vector U al spaţiului vectorial este dat în mod unic de

$$U = xu + yv,$$

iar un punct *M* este dat de

$$OM = U.$$

A) Spaţiul vectorial este orientat: perechea {U, V} definită prin

$$U = xu + yv , V = r'u - i/'v$$

este o bază dacă 3 = *xy′ — yx′* este nenul, iar semnul lui 5 arată dacă baza (U, V> are sensul pozitiv (aceeaşi orientare ca baza {u, v}) sau sensul negativ.

{U, V} Şi {V, U} sînt de sensuri contrare,

{U, V> Şi {- U, -V} sînt de acelaşi sens,

{U, V| şi {—U, V}, la fel ca şi {U, V} şi {U, —V}, sînt de sensuri contrare.

B) Dreapta* Amintim că, fiind dat un punct *A* şi un vector U, o dreaptă este definită ca mulţimea punctelor *Al* care verifică

$$AM = mU,$$

unde *m* parcurge mulţimea a numerelor reale.

U se numeşte *vectorul director* al dreptei.

Din definiţie rezultă că orice dreaptă este global invariantă la: orice translaţie de vector aU, oricare ar fi numărul *a:*

$$im, \; m\backslash\_\_\_\__z m + a;$$

orice omotetie al cărei centru este unul din punctele ei:

$$Vm, \; m\backslash\_\_\_— a);$$

orice inversiune al cărei pol este unul din punctele ei:

$$Vm, \; m_x\_\_\_\__{z:} \; m — a$$

mai general, orice transformare omografică pe <&: